

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Normal

Distribusi normal merupakan suatu alat statistik yang sangat penting untuk menaksir dan meramalkan peristiwa-peristiwa yang lebih luas. Distribusi normal disebut juga dengan distribusi Gauss.

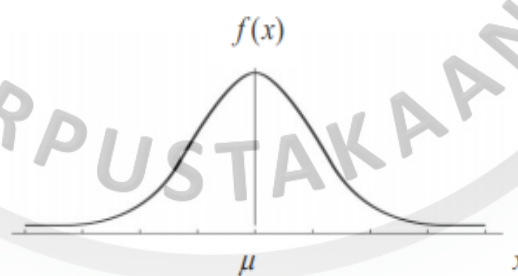
Fungsi densitas dari variabel acak X yang berdistribusi normal dengan *mean* μ dan varians σ^2 adalah:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \dots(2.01)$$

dimana: $-\infty \leq x \leq \infty, -\infty \leq \mu \leq \infty, \sigma^2 > 0$

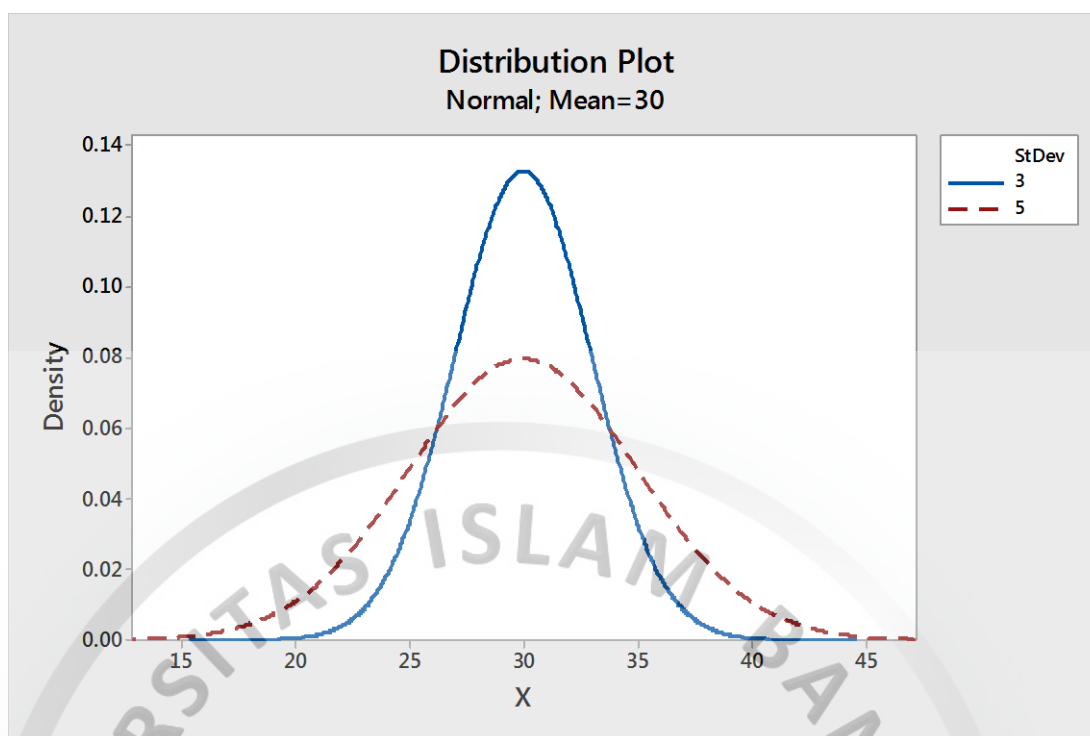
ditulis $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (Hogg dan Craig, 1978).

Distribusi normal memiliki kurva yang simetris membentuk suatu lonceng. Kurva distribusi normal umum disajikan pada Gambar 2.1 berikut ini.



Gambar 2.1 Kurva distribusi normal umum

Jika varians berbeda, maka kurva distribusi normalnya seperti pada Gambar 2.2 berikut ini.



Gambar 2.2 Kurva distribusi normal ketika varians berbeda

Selain distribusi normal umum, orang juga lebih banyak menggunakan distribusi normal baku. Kurva distribusi normal baku diperoleh dari distribusi normal umum dengan cara transformasi:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \dots(2.02)$$

Oleh karena itu fungsi densitas distribusi normal baku adalah:

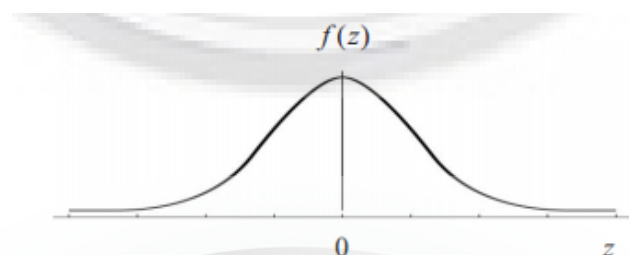
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad -\infty \leq z \leq \infty \quad \dots(2.03)$$

(Hogg dan Craig, 1978).

Bentuk transformasi di atas memetakan distribusi normal menjadi distribusi normal baku, sebab distribusi normal dengan variabel z ini memiliki nilai rata-rata = nol dan simpangan baku = satu. Transformasi ini juga mempertahankan luas di bawah kurva distribusi normalnya. Artinya, luas di bawah kurva distribusi normal antara x_1

dan x_2 sama dengan luas di bawah kurva distribusi normal baku antara z_1 dan z_2 .

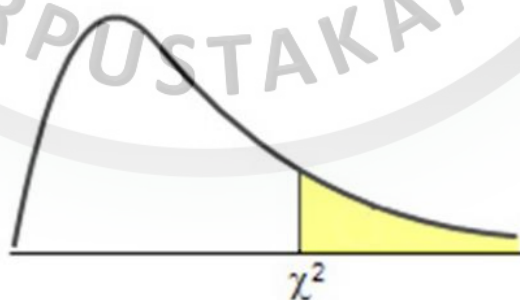
Kurva distribusi normal baku disajikan pada Gambar 2.3 berikut ini.



Gambar 2.3 Kurva distribusi normal baku

2.2 Distribusi Chi-Kuadrat

Distribusi chi-kuadrat dengan $dk=k$ adalah distribusi jumlah kuadrat k peubah acak normal baku yang saling bebas. Distribusi ini juga merupakan peluang suatu sampel acak yang menghasilkan nilai χ^2 yang lebih besar dari suatu nilai tertentu, sama dengan luas daerah di bawah kurva di sebelah kanan nilai tersebut. Nilai tertentu tersebut biasanya ditulis dengan χ^2_{α} . Dengan demikian χ^2_{α} menyatakan nilai χ^2_{α} yang luas di sebelah kanannya sama dengan α . Daerah yang luasnya sama dengan α ini dinyatakan oleh daerah yang diarsir. Seperti yang terlihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Kurva distribusi chi-kuadrat

Distribusi ini seringkali digunakan dalam statistika inferensial, seperti dalam uji hipotesis, atau dalam penyusunan selang kepercayaan.

Fungsi densitas dari distribusi chi-kuadrat adalah:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{v}{2}-1} \quad \dots(2.04)$$

Untuk $x > 0$ dan v adalah derajat kebebasan yang dinotasikan dengan $X \sim \chi^2_{(v)}$.

Dapat ditunjukkan bahwa:

a. Rata-rata = $E(X) = v$... (2.05)

b. Varians = $Var(X) = 2v$... (2.06)

c. Momen = $M_t(t) = (1 - 2t)^{-\frac{v}{2}}$... (2.07)

(Hogg dan Craig, 1978).

Nilai kritis dari distribusi χ^2 dapat dilihat pada Lampiran 1.

2.3 Distribusi dari Varians (S^2)

Jika S^2 varians sampel acak berukuran n yang diambil dari populasi normal dengan varians σ^2 , maka statistik (Faradila, 2015) adalah:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \quad \dots(2.08)$$

2.4 Uji Normalitas

Uji normalitas data adalah uji untuk mengukur apakah data yang didapatkan memiliki distribusi normal sehingga dapat dipakai dalam statistik. Dengan kata lain uji normalitas adalah uji untuk mengetahui apakah data empirik yang didapatkan dari lapangan itu sesuai dengan distribusi teori tertentu, dalam kasus ini distribusi normal. Tujuan uji normalitas adalah untuk mengetahui apakah distribusi sebuah data

mendekati distribusi normal, yakni distribusi data yang mempunyai pola seperti distribusi normal (Ariyana, 2016).

Banyak sekali teknik pengujian normalitas suatu distribusi data yang telah dikembangkan oleh para ahli beberapa teknik yang bisa kita gunakan untuk menguji normalitas secara analitis yaitu melalui rumus Kolmogorov-Smirnov dan Shapiro-Wilk. Sedangkan secara deskriptif uji normalitas data dilakukan melalui Q-Q Plot, Box Plot, Histogram, Kurtosis, dan Skewness.

Uji satu sampel Kolmogorov-Smirnov adalah suatu tes Goodness of fit, yang memperhatikan tingkat kesesuaian antara distribusi serangkaian harga sampel (skor yang dianggap observasi) dengan suatu distribusi teoritis tertentu. Uji ini menetapkan apakah skor dalam sampel dapat secara masuk akal dianggap berasal dari suatu populasi dengan distribusi teoritis tertentu itu (Siegel, 1985). K-S test mengukur kedekatan jarak antara $F(r_i)$ dengan $S_n(r_i)$ ketika n diasumsikan sebagai nilai yang maksimum.

Statistik uji Kolmogorov-Smirnov adalah:

$$D_{hitung} = \text{maksimum } |F(r_i) - S_n(r_i)|$$

dimana

$F(r_i)$ = distribusi frekuensi kumulatif teoritis

$S_n(r_i)$ = distribusi frekuensi kumulatif yang diobservasi dari suatu sampel acak dengan banyaknya pengamatan

K-S test menggunakan pengujian α dengan membandingkan nilai D_{hitung} dengan nilai kritis Kolmogorov-Smirnov dari sebuah tabel statistik. Atau bisa juga dengan membandingkan nilai $p - value$ dengan α . Dengan menggunakan hipotesis:

H_0 : data berasal dari populasi berdistribusi teoritis tertentu

H_1 : data bukan berasal dari populasi berdistribusi teoritis tertentu

Kriteria untuk pengujian ini adalah tolak hipotesis nol jika Dhitung lebih besar dari nilai kritis Kolmogorov-Smirnov pada taraf signifikansi yang ditetapkan. Nilai kritis Kolmogorov-Smirnov terdapat pada Lampiran 2. Akan tetapi jika menggunakan $p - value$, maka kriteria untuk pengujian ini adalah tolak hipotesis nol ketika nilai $p - value$ kurang dari α .

2.5 Teori Pengendalian Kualitas

Perkembangan dunia usaha yang semakin kompetitif ini, menuntut pengusaha (produsen) untuk mengatur strategi dalam usahanya terutama menjamin kualitas produk yang dihasilkan. Produsen menjamin kualitas produk dengan berusaha melindungi dan menjaga kualitas melalui pemantauan faktor-faktor yang menyebabkan kualitas produk tidak sesuai dengan harapan. Faktor-faktor tersebut seperti mesin, manusia, bahan baku dan metode. Faktor-faktor tersebut harus dalam kondisi tidak mengalami perubahan yang cukup berarti pada saat proses produksi. Untuk menjaga kualitas agar konsisten dalam menghasilkan produk berkualitas dan sesuai dengan harapan, maka perlu dilakukan pengendalian kualitas.

Pengendalian kualitas adalah suatu kegiatan yang dilakukan produsen untuk berusaha melindungi dan menjaga kualitas produk yang dihasilkan sesuai dengan harapan, agar konsumen mendapat kepuasan atas nilai guna dan produsen mendapat kepuasan atas imbalan yang berupa keuntungan (Ariani, 2004).

Statistik sebagai alat dalam pengendalian kualitas (*statistical quality control*) merupakan teknik penyelesaian masalah yang digunakan untuk memonitor, mengendalikan, menganalisis, mengelola, dan memperbaiki produk dan proses menggunakan metode-metode statistik (Ariani, 2004).

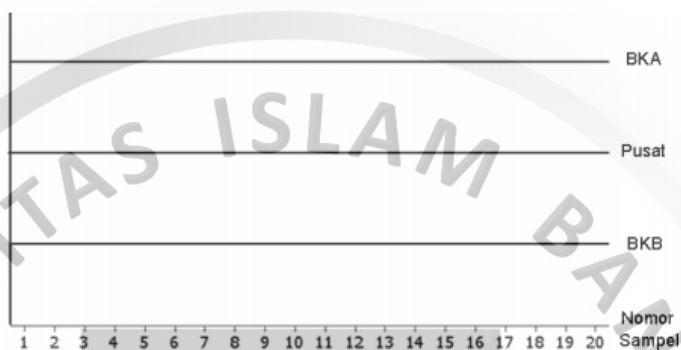
Pengendalian kualitas statistik sering disebut sebagai pengendalian proses statistik. Pengendalian kualitas statistik dan pengendalian proses statistik apabila dilakukan bersama-sama maka keduanya dapat digunakan untuk mengetahui kinerja selama proses produksi. Pengendalian kualitas statistik mempunyai cakupan yang lebih luas karena di dalamnya terdapat pengendalian proses statistik, pengendalian produk dan analisis kemampuan proses.

Konsep penting dalam pengendalian kualitas statistik adalah variasi, variasi dalam proses produksi akan menimbulkan variasi (perubahan) dalam kualitas produk yang dihasilkan. Hal ini akan terjadi meskipun usaha-usaha pengendalian telah dilakukan. Pada pengendalian kualitas statistik dikenal dua sumber variasi yaitu variasi disebabkan oleh sebab-sebab khusus dan variasi disebabkan oleh sebab-sebab umum (alamiah) yang terjadi pada proses produksi. Variasi disebabkan oleh sebab-sebab umum (alamiah) yaitu variasi yang sudah melekat pada proses produksi, sedangkan variasi disebabkan oleh sebab-sebab khusus yaitu terjadinya perubahan pada saat proses produksi seperti perubahan penggunaan alat, kesalahan bahan baku, pengaturan mesin berubah, kesalahan tenaga kerja dan lain sebagainya. Tujuan utama dalam pengendalian proses statistik adalah mendeteksi adanya variasi disebabkan oleh sebab-sebab khusus. Proses dikatakan terkendali secara statistik apabila variasi disebabkan oleh sebab-sebab khusus tidak terjadi pada saat proses produksi. Sementara itu, untuk mengetahui apakah proses produksi sudah terkendali secara statistik digunakan alat yang disebut diagram kendali.

2.6 Diagram Kendali Shewhart

Diagram Kendali adalah suatu metode grafik yang dapat digunakan untuk mengetahui apakah suatu proses atau aktivitas berada dalam pengendalian kualitas secara statistik atau tidak dengan menetapkan batas-batas kendali. Diagram kendali

Shewhart diperkenalkan oleh Walter A. Shewhart pada 1920 saat bekerja di Bell Labs. Diagram kendali Shewhart digunakan untuk memberikan petunjuk-petunjuk dasar dalam mengambil tindakan yang diperlukan agar proses atau aktivitas berada dalam keadaan yang diinginkan. Pada Gambar 2.5 merupakan contoh diagram Shewhart.



Sumber : Muchlis (2010)

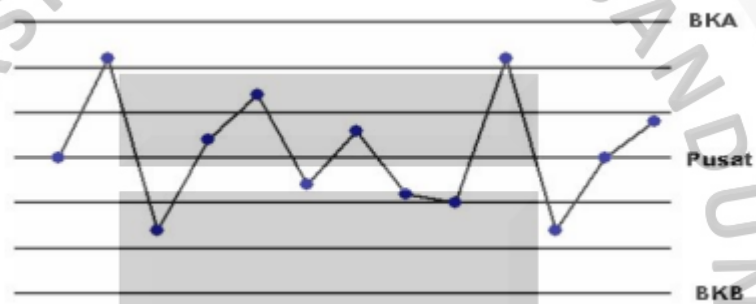
Gambar 2.5 Contoh Diagram Kendali Shewhart

Diagram kendali Shewhart terdiri dari tiga baris batas kendali, yaitu garis pusat yang menunjukkan nilai tengah dari karakteristik kualitas yang memiliki hubungan dalam keadaan terkendali, batas kendali atas (BKA) dan batas kendali bawah (BKB) adalah batas suatu penyimpangan yang masih diperbolehkan.

Diagram kendali dapat memisahkan sebab-sebab variasi yang terjadi pada saat proses produksi yaitu variasi disebabkan oleh sebab-sebab umum (alamiah) dan variasi disebabkan oleh sebab-sebab khusus yang dapat dilihat melalui batas pengendalian. Apabila nilai sampel menunjukkan variasi melebihi batas pengendalian yang masih diperbolehkan, ini menunjukkan adanya variasi oleh sebab-sebab khusus yang masuk ke dalam proses produksi dan proses harus diperiksa untuk dicari penyebab dari variasi tersebut. Variasi yang disebabkan oleh sebab-sebab

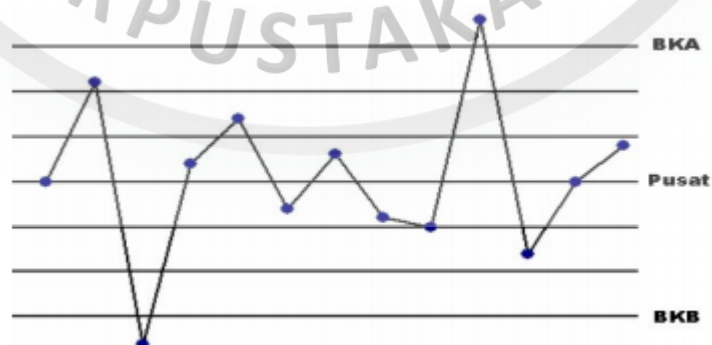
umum (alamiah) dapat dikatakan bahwa nilai titik sampel berada dalam batas pengendalian, sehingga tidak perlu dicari penyebab variasinya (Adhitya, 2017).

Karakteristik mutu yang diamati digambarkan sebagai titik-titik pada diagram kendali Shewhart, dimana dari pencarian titik yang digambarkan dapat dilihat apakah proses produksi beroperasi sebagaimana mestinya atau tidak, sehingga dari pencarian titik inilah dapat diketahui bahwa proses produksi berjalan sebagaimana mestinya apabila pencarian titik yang digambarkan terletak dalam batas-batas kendali atau batas-batas spesifikasi dan berpencar secara acak (Muchlis, 2010).



Gambar 2.6 Sebaran Titik untuk Proses Normal

Oleh karena itu jika ada satu titik atau lebih jatuh di luar batas-batas kendali dapat disimpulkan bahwa proses tidak terkendali.



Gambar 2.7 Sebaran Titik untuk Proses Tidak Normal

Kecuali keadaan tersebut kriteria proses tidak terkendali dapat juga dengan memperhatikan pencaran titik di bawah ini:

- a. Ada tujuh titik atau lebih terletak pada belahan sisi yang sama dari diagram kendali,
- b. Ada sepuluh dari sebelas titik yang terletak pada belahan sisi yang sama,
- c. Ada dua belas dari empat belas titik yang terletak pada belahan sisi yang sama,
- d. Ada empat belas dari tujuh belas titik yang terletak pada belahan sisi yang sama,
- e. Ada enam belas dari dua puluh titik yang terletak pada belahan sisi yang sama,

Apabila nilai sampel (titik) menunjukkan tidak terkendali, tindakan yang perlu dilakukan yaitu mencari atau menyelidiki mengenai sebab-sebab terjadinya nilai tersebut. Penyelidikan ini harus berdasarkan pada catatan-catatan tertulis pada lembar pengambilan data mengenai keadaan-keadaan yang mungkin dapat mempengaruhi terjadinya tidak terkendali. Apabila dapat diketahui sebab-sebab dari tidak terkendali tersebut, maka diagram kendali tersebut dapat direvisi. Revisi dilakukan dengan cara mengabaikan (tidak mengikutsertakan) data yang tidak terkendali tersebut dan kemudian menghitung kembali garis pusat, batas kendali atas (BKA) dan batas kendali bawah (BKB) yang baru dan membuat kembali diagram kendali dari data-data yang telah direvisi. Revisi dengan mengabaikan (tidak mengikutsertakan) data yang tidak terkendali harus mempunyai alasan yang memang kuat. Proses produksi yang sudah dalam keadaan terkendali secara statistik, biasanya dilakukan analisis kemampuan proses. Analisis kemampuan proses dilakukan untuk mengetahui apakah suatu produk sesuai dengan kebutuhan yang diharapkan oleh

konsumen atau belum. Menurut Ariani (2004), analisis kemampuan proses dapat digunakan apabila memenuhi dua asumsi penting dalam membentuk analisis kemampuan proses dengan data kontinu, yaitu proses berada dalam batas pengendali statistik dan distribusi proses adalah distribusi normal.

Diagram kendali variabel dibagi menjadi dua jenis yaitu diagram kendali yang digunakan untuk mengetahui perubahan dari rata-rata (\bar{x}) karakteristik kualitas tertentu dan diagram kendali yang digunakan untuk menggambarkan variabilitas atau dispersi S dan R karakteristik kualitas tertentu. Asumsi untuk membentuk diagram kendali variabel tersebut yaitu data pengamatan harus berdistribusi normal. Oleh karena itu, pengujian normalitas terhadap data pengamatan perlu dilakukan terlebih dahulu sebelum membentuk diagram kendali variabel. Apabila ada data pengamatan tidak berdistribusi normal, maka dapat digunakan diagram kendali lain yang digunakan untuk data pengamatan yang tidak normal.

2.7 Diagram Kendali S^2 Shewhart

Andaikan suatu proses produksi akan dikendalikan melalui karakteristik mutu X yang berdistribusi normal dengan parameter rata-rata μ dan varians σ^2 dalam keadaan terkendali $\mu = \mu_0$ dan $\sigma^2 = \sigma_0^2$. Pengontrolan fokus pada memantau pergeseran σ_0^2 melalui statistik atau diagram kendali Shewhart S^2 .

Adapun langkah-langkah menentukan diagram kendali Shewhart S^2 (Montgomery, 2005):

1. Tentukan ukuran sampel n , biasanya 4,5,6.
2. Tentukan banyaknya periode/subgrup m antara 20-25.
3. Hitung varians masing-masing periode:

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ji} - \bar{X}_i)^2 \quad \dots(2.09)$$

dimana $\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ji}$; $i = 1, 2, \dots, m$.

4. Batas-batas kendali S^2 Shewhart ditentukan sebagai berikut:

Misalnya sampel acak X_1, X_2, \dots, X_n diambil dari distribusi $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka ekspektasi dan varians rata-rata sampel $\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ji} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, selanjutnya tentukan statistik pada Persamaan (2.04) yang berdistribusi $\chi^2_{(n-1)}$.

Oleh karena itu batas-batas kendali untuk S^2 :

$$BKA = \frac{\sigma_0^2 \chi^2_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}{n-1} \quad \dots(2.10)$$

$$GP = \sigma_0^2 \quad \dots(2.11)$$

$$BKB = \frac{\sigma_0^2 \chi^2_{(n-1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{n-1} \quad \dots(2.12)$$

Dalam hal simpangan baku (σ_0) tidak diketahui, σ_0 ditaksir dari data yang diambil selama m periode sebagaimana pada langkah 2, yaitu:

$$\hat{\sigma}_0^2 = S_p^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i^2 \quad \dots(2.13)$$

sehingga batas-batas kendalinya menjadi:

$$B\hat{K}A = \frac{S_p^2 \chi^2_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}{n-1} \quad \dots(2.14)$$

$$GP = S_p^2 \quad \dots(2.15)$$

$$B\hat{K}B = \frac{S_p^2 \chi^2_{(n-1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{n-1} \quad \dots(2.16)$$

(Montgomery, 2005).

2.8 *Average Run Length (ARL)*

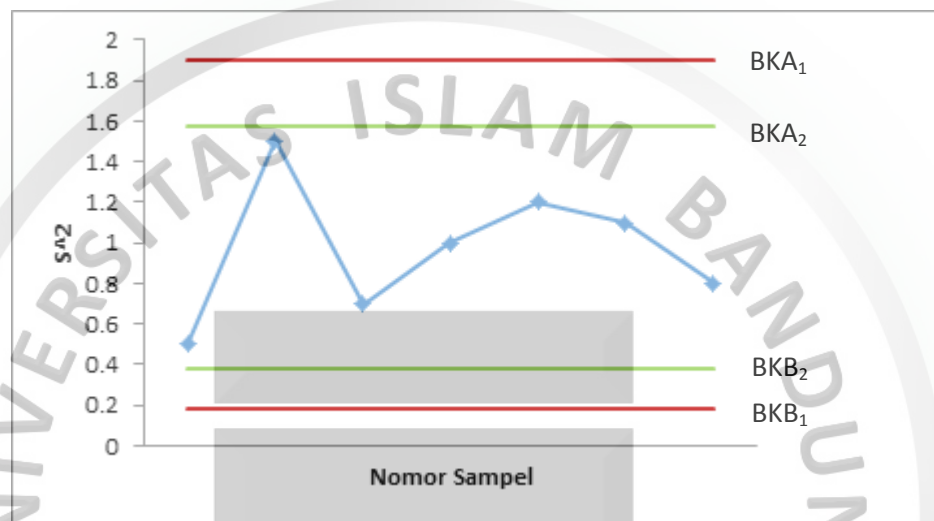
Kriteria yang digunakan untuk dapat membandingkan kinerja diagram kendali adalah dengan mengukur seberapa cepat diagram kendali tersebut membangkitkan sinyal tidak terkendali. Diagram kendali yang lebih cepat mendeteksi sinyal tidak terkendali disebut lebih sensitif terhadap perubahan proses. Salah satu cara untuk mengukur kinerja diagram kendali adalah dengan *Average Run Length* (ARL). ARL adalah rata-rata *run* (observasi) yang harus dilakukan sampai ditemukannya tidak terkendali yang pertama. Apabila proses dalam keadaan terkendali maka digunakan notasi ARL_0 . Dengan demikian ARL_0 akan bernilai besar dan ARL_1 akan bernilai kecil ketika proses dalam keadaan tidak terkendali. Secara umum persamaan untuk perhitungan nilai ARL adalah: $ARL = \frac{1}{p}$ dengan $p =$ probabilitas suatu titik keluar dari batas-batas diagram kendali. Untuk ARL_0 , $p = \alpha =$ probabilitas kesalahan/*error* tipe I (menyatakan keadaan tidak terkendali padahal keadaan terkendali) atau probabilitas suatu titik rata-rata sampel jatuh dari luar batas kendali pada saat proses terkendali, α disebut juga sebagai probabilitas *false alarm*, sedangkan untuk ARL_1 nilai $p = \beta =$ probabilitas kesalahan/*error* tipe II (menyatakan keadaan terkendali padahal keadaan tidak terkendali) atau probabilitas suatu titik rata-rata sampel jatuh di dalam batas kendali pada saat proses tidak terkendali. Secara umum performa baik dari sebuah diagram kendali jika mempunyai ARL_0 sebesar mungkin dan ARL_1 sekecil mungkin (Kuswendi, 2010).

2.9 *Diagram Kendali S² Menggunakan Repetitive Sampling Aslam*

Jenis diagram kendali seperti diagram kendali R, S, dan S² biasa digunakan untuk memantau variansi proses. Aslam dkk (2015) mengusulkan diagram kendali S² menggunakan *repetitive sampling*. Pada diagram kendali S² menggunakan *repetitive sampling Aslam* untuk variansi diketahui, langkahnya sebagai berikut.

Langkah 1 ambil sampel sebanyak n . Hitung S^2 dari data sampel.

Langkah 2 definisikan proses tidak terkendali jika $S^2 \geq BKA_1$ atau $S^2 \geq BKB_1$ (BKA_1 dan BKB_1 disebut batas kendali luar). Proses akan terkendali jika $BKB_2 \leq S^2 \leq BKA_2$ (BKA_2 dan BKB_2 disebut batas kendali dalam). Jika tidak, lanjutkan ke langkah pertama dan ulangi prosesnya.



Gambar 2.8 Contoh Diagram Kendali S^2 Menggunakan *Repetitive Sampling Aslam*

Untuk menghitung S_i^2 dengan persamaan (2.09). Hitung juga S^2 dari keseluruhan data yang ada sebagai berikut.

$$S^2 = \frac{1}{mn-1} \sum (X_{ji} - \bar{X})^2 \quad \dots(2.17)$$

dimana $\bar{X} = \frac{1}{m} \bar{X}_i$; $j = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, m$.

Alasan dari diagram kendali S^2 yang diusulkan Aslam, dkk (2015) merupakan keputusan yang dapat dibuat dari sampel pertama ketika bukti cukup tetapi mungkin lebih baik untuk menunda ketika bukti tidak cukup. Keempat batas diagram kendali untuk diagram kendali yang diusulkan ketika σ^2 diketahui. Batas kendali luar dinyatakan oleh:

$$BKA_1 = \sigma^2 + k_1 \sqrt{\frac{2(\sigma^2)^2}{(n-1)}} \quad \dots(2.18)$$

$$BKA_1 = \sigma^2 - k_1 \sqrt{\frac{2(\sigma^2)^2}{(n-1)}} \quad \dots(2.19)$$

dimana k_1 adalah konstanta yang harus ditentukan. Batas kendali dalam adalah:

$$BKA_2 = \sigma^2 + k_2 \sqrt{\frac{2(\sigma^2)^2}{(n-1)}} \quad \dots(2.20)$$

$$BKB_2 = \sigma^2 + k_2 \sqrt{\frac{2(\sigma^2)^2}{(n-1)}} \quad \dots(2.21)$$

dimana k_2 adalah konstanta yang harus ditentukan.

Probabilitas bahwa proses tersebut dinyatakan di luar kendali berdasarkan pada sampel tunggal adalah

$$P_{out}^{(1)} = P(S^2 \geq UCL_1) + P(S^2 \leq LCL_1) \quad \dots(2.22)$$

Perhatikan bahwa $(n-1)S^2/\sigma^2$ mengikuti distribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan $n-1$ jika proses terkendali. G merupakan fungsi distribusi dari distribusi tersebut. Lalu kapan prosesnya terkendali

$$P(S^2 \geq UCL_1) = 1 - G\left(\frac{(n-1)UCL_1}{\sigma^2}\right) = 1 - G\left((n-1)\left(1 + k_1\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) \quad \dots(2.23)$$

Demikian pula

$$P(S^2 \leq LCL_1) = G\left((n-1)\left(1 - k_1\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) \quad \dots(2.24)$$

Jadi, akhirnya Persamaan (2.22) dapat ditulis ulang sebagai berikut ketika proses terkendali

$$P_{out}^{(1)} = 1 + G\left((n-1)\left(1 - k_1\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) - G\left((n-1)\left(1 + k_1\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) \quad \dots(2.25)$$

Probabilitas bahwa proses tersebut dinyatakan dalam kendali berdasarkan pada satu sampel tunggal dapat dihitung sebagai berikut:

$$P_{in}^{(1)} = P(LCL_2 \leq S^2 \leq UCL_2) = P(S^2 \leq UCL_2) - P(S^2 \leq LCL_2) \quad \dots(2.26)$$

dan ketika proses terkendali

$$P_{in}^{(1)} = G\left((n-1)\left(1 - k_2\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) - G\left((n-1)\left(1 + k_2\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) \quad \dots(2.27)$$

Probabilitas pengulangan dapat dihitung sebagai berikut:

$$P_{rep} = P(LCL_1 \leq S^2 < LCL_2) + P(UCL_2 < S^2 \leq UCL_1) \quad \dots(2.28)$$

Jadi, ketika prosesnya terkendali

$$P_{rep} = \left\{ G\left((n-1)\left(1 - k_1\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) - G\left((n-1)\left(1 - k_2\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) \right\} + \left\{ G\left((n-1)\left(1 + k_2\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) - G\left((n-1)\left(1 + k_1\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) \right\} \quad \dots(2.29)$$

Oleh karena itu, probabilitas proses dinyatakan tidak terkendali untuk rencana yang diusulkan ketika proses sebenarnya dalam kendali diberikan sebagai berikut:

$$P_{out} = \frac{1 + G\left((n-1)\left(1 - k_1\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) - G\left((n-1)\left(1 + k_1\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right)}{1 - \left[\left\{ G\left((n-1)\left(1 - k_1\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) - G\left((n-1)\left(1 - k_2\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) \right\} + \left\{ G\left((n-1)\left(1 + k_2\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) - G\left((n-1)\left(1 + k_1\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) \right\} \right]} \quad \dots(2.30)$$

Average Sample Number (ASN) untuk diagram kendali yang diusulkan ketika proses sedang terkendali diberikan oleh

$$ASN_0 = \frac{n}{1 - \left[\left\{ G\left((n-1)\left(1 - k_1\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) - G\left((n-1)\left(1 - k_2\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) \right\} + \left\{ G\left((n-1)\left(1 + k_2\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) - G\left((n-1)\left(1 + k_1\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)\right) \right\} \right]} \quad \dots(2.31)$$

Sekarang kita mendapatkan persamaan ketika proses digeser. Misalkan proses varians telah bergeser dari σ^2 ke $\sigma_1^2 = c\sigma^2$ untuk konstanta sementara rata-rata tetap sama. Sekarang,

$(n - 1)S^2/(c\sigma^2)$ mengikuti distribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan $n-1$.

Probabilitas bahwa proses dinyatakan di luar kendali di bawah varians *shift* diturunkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P_{out,shift}^{(1)} &= P(S^2 \geq UCL_1 | \sigma_1^2) + P(S^2 \leq LCL_1 | \sigma_1^2), \\ &= 1 + G\left(\frac{n-1}{c}\left(1 + k_2\sqrt{\frac{2}{n}-1}\right)\right) - G\left((n-1)\left(1 + k_1\sqrt{\frac{2}{n}-1}\right)\right) \quad \dots(2.32) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, probabilitas bahwa proses tersebut dinyatakan di luar kendali ketika proses tersebut bergeser dapat diperoleh sebagai berikut:

$$P_{out,shift} = \frac{1 + G\left((n-1/c)\left(1 - k_1\sqrt{\frac{2}{n}-1}\right)\right) - G\left((n-1/c)\left(1 + k_1\sqrt{\frac{2}{n}-1}\right)\right)}{1 - \left[\frac{\left\{ G\left((n-1/c)\left(1 - k_1\sqrt{\frac{2}{n}-1}\right)\right) - G\left((n-1/c)\left(1 - k_2\sqrt{\frac{2}{n}-1}\right)\right) \right\}}{\left\{ G\left((n-1/c)\left(1 + k_2\sqrt{\frac{2}{n}-1}\right)\right) - G\left((n-1/c)\left(1 + k_1\sqrt{\frac{2}{n}-1}\right)\right) \right\}} \right]} \quad \dots(2.33)$$

ARL saat proses di bawah kendali diberikan sebagai

$$ARL_0 = \frac{1}{P_{out}} \quad \dots(2.34)$$

ARL saat proses di luar kendali diberikan sebagai

$$ARL_1 = \frac{1}{P_{out,shift}} \quad \dots(2.35)$$

Ketika σ^2 tidak diketahui, maka σ^2 diganti dengan S^2 sebagaimana persamaan (2.17). Sehingga batas-batas kendali diagram S^2 menggunakan *repetitive sampling* sebagai berikut.

$$BKA_1 = S^2 + k_1\sqrt{2(S^2)^2/(n-1)} \quad \dots(2.36)$$

$$BKB_1 = S^2 - k_1 \sqrt{2(S^2)^2/(n-1)} \quad \dots(2.37)$$

$$BKA_2 = S^2 + k_2 \sqrt{2(S^2)^2/(n-1)} \quad \dots(2.38)$$

$$BKB_2 = S^2 - k_2 \sqrt{2(S^2)^2/(n-1)} \quad \dots(2.39)$$

$$GP = S^2 \quad \dots(2.40)$$

dimana k_1 dan k_2 dapat dilihat pada Tabel 2.1 sampai 2.3.

Koefisien k_1 dan k_2 untuk diagram kendali S^2 menggunakan *repetitive sampling* yang diusulkan dapat ditentukan dengan mempertimbangkan target ARL_0 , ketika proses dalam kendali sambil menjaga ASN_0 seminimal mungkin. Aslam, dkk (2015) menyajikan koefisien kendali dalam Tabel 2.1 untuk berbagai ukuran sampel (n) ketika $ARL_0 = 200$, di mana ARL dan ASN dilaporkan menurut berbagai konstanta *shift* (c). Kita gunakan $n = 4, 5, 6, 7$ dan c dari 1,0 hingga 2,0 dengan kenaikan 0,1. Tabel 2.2 adalah kasusnya ketika $ARL_0 = 300$ dan Tabel 2.3 adalah kasus ketika $ARL_0 = 370$.

Tabel 2.1 ARL dari diagram kendali yang diusulkan ketika $ARL_0 = 200$

| c | $n = 4$ | | $n = 5$ | | $n = 6$ | | $n = 7$ | |
|-----|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|----------------------------------|------|
| | $k_1 = 4.03985$ $k_2 = 2.39055$ | | $k_1 = 3.91435$ $k_2 = 1.39822$ | | $k_1 = 3.79672$ $k_2 = 1.38838$ | | $k_1 = 3.6298$ $k_2 = 2.7954$ | |
| | ARL | ASN | ARL | ASN | ARL | ASN | ARL | ASN |
| 1.0 | 200.00 | 4.11 | 200.00 | 5.49 | 200.00 | 6.68 | 200.00 | 7.08 |
| 1.1 | 114.78 | 4.15 | 106.35 | 5.66 | 101.50 | 6.90 | 101.18 | 7.12 |
| 1.2 | 72.27 | 4.20 | 62.80 | 5.84 | 57.74 | 7.14 | 57.87 | 7.18 |
| 1.3 | 48.86 | 4.25 | 40.21 | 6.02 | 35.86 | 7.40 | 36.34 | 7.25 |
| 1.4 | 34.94 | 4.30 | 27.44 | 6.21 | 23.88 | 7.66 | 24.54 | 7.32 |
| 1.5 | 26.13 | 4.35 | 19.73 | 6.39 | 16.82 | 7.91 | 17.56 | 7.39 |
| 1.6 | 20.28 | 4.40 | 14.80 | 6.57 | 12.42 | 8.15 | 13.16 | 7.46 |
| 1.7 | 16.22 | 4.45 | 11.51 | 6.73 | 9.53 | 8.38 | 10.25 | 7.53 |
| 1.8 | 13.30 | 4.50 | 9.22 | 6.88 | 7.56 | 8.58 | 8.24 | 7.60 |
| 1.9 | 11.15 | 4.54 | 7.57 | 7.02 | 6.17 | 8.76 | 6.80 | 7.66 |
| 2 | 9.51 | 4.58 | 6.36 | 7.13 | 5.16 | 8.90 | 5.75 | 7.71 |
| 3 | 3.60 | 4.81 | 2.34 | 7.49 | 1.94 | 9.11 | 2.21 | 7.89 |
| 4 | 2.31 | 4.82 | 1.60 | 7.14 | 1.39 | 8.40 | 1.53 | 7.75 |

Tabel 2.3 ARL dari diagram kendali yang diusulkan ketika $ARL_0 = 300$

| c | n = 4 | | n = 5 | | n = 6 | | n = 7 | |
|-----|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| | $k_1 = 4.40671$ $k_2 = 2.09285$ | | $k_1 = 4.18449$ $k_2 = 2.40599$ | | $k_1 = 4.05323$ $k_2 = 1.95393$ | | $k_1 = 3.93845$ $k_2 = 2.04327$ | |
| | ARL | ASN | ARL | ASN | ARL | ASN | ARL | ASN |
| 1 | 300.00 | 4.17 | 300.00 | 5.13 | 300.00 | 6.28 | 300.00 | 7.28 |
| 1.1 | 164.55 | 4.23 | 156.96 | 5.19 | 148.46 | 6.41 | 142.78 | 7.43 |
| 1.2 | 99.67 | 4.30 | 91.68 | 5.27 | 82.84 | 6.57 | 77.32 | 7.61 |
| 1.3 | 65.16 | 4.38 | 58.26 | 5.35 | 50.68 | 6.73 | 46.21 | 7.80 |
| 1.4 | 45.24 | 4.45 | 39.55 | 5.43 | 33.32 | 6.90 | 29.84 | 8.01 |
| 1.5 | 32.96 | 4.53 | 28.31 | 5.52 | 23.22 | 7.08 | 20.50 | 8.22 |
| 1.6 | 24.98 | 4.60 | 21.16 | 5.60 | 16.97 | 7.25 | 14.81 | 8.43 |
| 1.7 | 19.56 | 4.68 | 16.38 | 5.68 | 12.90 | 7.42 | 11.16 | 8.63 |
| 1.8 | 15.75 | 4.75 | 13.07 | 5.76 | 10.13 | 7.58 | 8.72 | 8.81 |
| 1.9 | 12.97 | 4.81 | 10.69 | 5.84 | 8.19 | 7.72 | 7.01 | 8.98 |
| 2 | 10.90 | 4.87 | 8.94 | 5.91 | 6.78 | 7.85 | 5.79 | 9.13 |
| 3 | 3.76 | 5.23 | 3.07 | 6.27 | 2.32 | 8.30 | 2.02 | 9.50 |
| 4 | 2.33 | 5.25 | 1.95 | 6.23 | 1.55 | 7.95 | 1.41 | 8.96 |

Tabel 2.3 ARL dari diagram kendali yang diusulkan ketika $ARL_0 = 370$

| c | n = 4 | | n = 5 | | n = 6 | | n = 7 | |
|-----|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|-----------------------------------|-------|
| | $k_1 = 4.57769$ $k_2 = 2.43202$ | | $k_1 = 4.37021$ $k_2 = 1.92006$ | | $k_1 = 4.19825$ $k_2 = 2.24743$ | | $k_1 = 4.09419$ $k_2 = 1.8737$ | |
| | ARL | ASN | ARL | ASN | ARL | ASN | ARL | ASN |
| 1 | 370.00 | 4.11 | 370.00 | 5.26 | 370.00 | 6.19 | 370.00 | 7.36 |
| 1.1 | 199.90 | 4.16 | 187.55 | 5.36 | 180.28 | 6.29 | 171.14 | 7.55 |
| 1.2 | 119.63 | 4.21 | 106.51 | 5.48 | 99.40 | 6.41 | 90.40 | 7.76 |
| 1.3 | 77.45 | 4.27 | 66.01 | 5.62 | 60.23 | 6.54 | 52.86 | 8.01 |
| 1.4 | 53.33 | 4.33 | 43.81 | 5.75 | 39.30 | 6.67 | 33.47 | 8.26 |
| 1.5 | 38.59 | 4.39 | 30.73 | 5.89 | 27.20 | 6.82 | 22.59 | 8.52 |
| 1.6 | 29.08 | 4.45 | 22.55 | 6.03 | 19.76 | 6.96 | 16.07 | 8.78 |
| 1.7 | 22.65 | 4.51 | 17.17 | 6.16 | 14.94 | 7.10 | 11.94 | 9.03 |
| 1.8 | 18.14 | 4.57 | 13.50 | 6.29 | 11.68 | 7.24 | 9.21 | 9.27 |
| 1.9 | 14.88 | 4.63 | 10.90 | 6.41 | 9.39 | 7.36 | 7.33 | 9.48 |
| 2 | 12.46 | 4.68 | 9.01 | 6.52 | 7.74 | 7.48 | 6.00 | 9.66 |
| 3 | 4.16 | 5.01 | 2.91 | 7.04 | 2.53 | 7.97 | 2.00 | 10.11 |
| 4 | 2.52 | 5.07 | 1.84 | 6.91 | 1.65 | 7.74 | 1.38 | 9.40 |

Menurut Zhang dkk (2005), perbandingan antara diagram kendali S^2 menggunakan *repetitive sampling* dan diagram kendali S^2 Shewhart dalam hal sensitifitas untuk mendeteksi sinyal tidak terkendali dapat dilihat pada Tabel 2.4 dan 2.5.

Tabel 2.4 Perbandingan ARL dari Diagram Kendali yang Diusulkan dan Diagram Kendali S^2 Shewhart Ketika $ARL_0 = 300$

| c | n = 4 | | n = 5 | | n = 6 | | n = 7 | |
|-----|--|---------------------------|--|---------------------------|--|---------------------------|--|---------------------------|
| | Proposed with $k_1 = 4.406$ $k_2 = 2.092$ | Shewhart with $k = 4.370$ | Proposed with $k_1 = 4.184$ $k_2 = 2.405$ | Shewhart with $k = 4.163$ | Proposed with $k_1 = 4.053$ $k_2 = 1.953$ | Shewhart with $k = 4.019$ | Proposed with $k_1 = 3.938$ $k_2 = 2.043$ | Shewhart with $k = 3.910$ |
| 1 | 300.00 | 300.00 | 300.00 | 300.00 | 370.00 | 300.00 | 300.00 | 300.00 |
| 1.1 | 164.55 | 167.74 | 156.96 | 159.30 | 180.28 | 152.31 | 142.78 | 146.33 |
| 1.2 | 99.67 | 103.63 | 91.68 | 94.55 | 99.40 | 87.35 | 77.32 | 81.40 |
| 1.3 | 65.16 | 69.11 | 58.26 | 61.10 | 60.23 | 54.97 | 46.21 | 50.05 |
| 1.4 | 45.24 | 48.93 | 39.55 | 42.20 | 39.30 | 37.19 | 29.84 | 33.26 |
| 1.5 | 32.96 | 36.34 | 28.31 | 30.72 | 27.20 | 26.64 | 20.50 | 23.51 |
| 1.6 | 24.98 | 28.05 | 21.16 | 23.34 | 19.76 | 19.98 | 14.81 | 17.45 |
| 1.7 | 19.56 | 22.35 | 16.38 | 18.36 | 14.94 | 15.57 | 11.16 | 13.49 |
| 1.8 | 15.75 | 18.29 | 13.07 | 14.87 | 11.68 | 12.51 | 8.72 | 10.77 |
| 1.9 | 12.97 | 15.29 | 10.69 | 12.34 | 9.39 | 10.32 | 7.01 | 8.85 |
| 2 | 10.90 | 13.03 | 8.94 | 10.44 | 7.74 | 8.70 | 5.79 | 7.43 |
| 3 | 3.76 | 4.85 | 3.07 | 3.82 | 2.53 | 3.17 | 2.02 | 2.72 |
| 4 | 2.33 | 3.03 | 1.95 | 2.42 | 1.65 | 2.04 | 1.41 | 1.79 |

Tabel 2.5 Perbandingan ARL dari Diagram Kendali yang Diusulkan dan Diagram Kendali S^2 Shewhart Ketika $ARL_0 = 370$

| c | n = 4 | | n = 5 | | n = 6 | | n = 7 | |
|-----|---|---------------------------|--|---------------------------|--|---------------------------|--|-----------------------------|
| | Proposed with $k_1 = 4.57$ $k_2 = 2.432$ | Shewhart with $k = 4.553$ | Proposed with $k_1 = 4.370$ $k_2 = 1.920$ | Shewhart with $k = 4.330$ | Proposed with $k_1 = 4.198$ $k_2 = 2.247$ | Shewhart with $k = 4.175$ | Proposed with $k_1 = 4.094$ $k_2 = 1.873$ | Shewhart with $k = 4.05862$ |
| 1 | 370.00 | 370.00 | 370.00 | 370.00 | 370.00 | 370.00 | 370.00 | 370.00 |
| 1.1 | 199.90 | 202.74 | 187.55 | 192.35 | 180.28 | 183.76 | 171.14 | 176.40 |
| 1.2 | 119.63 | 123.17 | 106.51 | 112.18 | 99.40 | 103.48 | 90.40 | 96.29 |
| 1.3 | 77.45 | 80.98 | 66.01 | 71.42 | 60.23 | 64.12 | 52.86 | 58.27 |
| 1.4 | 53.33 | 56.65 | 43.81 | 48.71 | 39.30 | 42.81 | 33.47 | 38.20 |
| 1.5 | 38.59 | 41.63 | 30.73 | 35.07 | 27.20 | 30.32 | 22.59 | 26.68 |
| 1.6 | 29.08 | 31.84 | 22.55 | 26.39 | 19.76 | 22.52 | 16.07 | 19.61 |
| 1.7 | 22.65 | 25.17 | 17.17 | 20.59 | 14.94 | 17.39 | 11.94 | 15.02 |
| 1.8 | 18.14 | 20.44 | 13.50 | 16.55 | 11.68 | 13.87 | 9.21 | 11.90 |
| 1.9 | 14.88 | 16.99 | 10.90 | 13.64 | 9.39 | 11.36 | 7.33 | 9.70 |
| 2 | 12.46 | 14.39 | 9.01 | 11.48 | 7.74 | 9.52 | 6.00 | 8.10 |
| 3 | 4.16 | 5.16 | 2.91 | 4.05 | 2.53 | 3.34 | 2.00 | 2.85 |
| 4 | 2.52 | 3.17 | 1.84 | 2.51 | 1.65 | 2.11 | 1.38 | 1.85 |

Berdasarkan Tabel 2.4 dan 2.5 dapat dilihat bahwa ketika terjadi perubahan proses yang semakin membesar, nilai ARL pada diagram kendali yang diusulkan

(diagram kendali S^2 menggunakan *repetitive sampling*) akan lebih kecil dibandingkan dengan nilai ARL pada diagram kendali S^2 Shewhart. Artinya semakin kecil nilai ARL akan semakin bagus dalam memberi sinyal bahwa proses telah berubah.

