

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pendahuluan

Pada bab empat ini akan menguraikan hasil dan pembahasan dari seluruh metode yang telah dipaparkan. Langkah-langkah yang dipaparkan pada bab sebelumnya merupakan langkah-langkah untuk menaksir parameter model regresi sirkular sederhana, ragam asimptotik, serta selang kepercayaannya untuk sisaan yang berdistribusi wrapped Cauchy.

4.2 Deskripsi Data

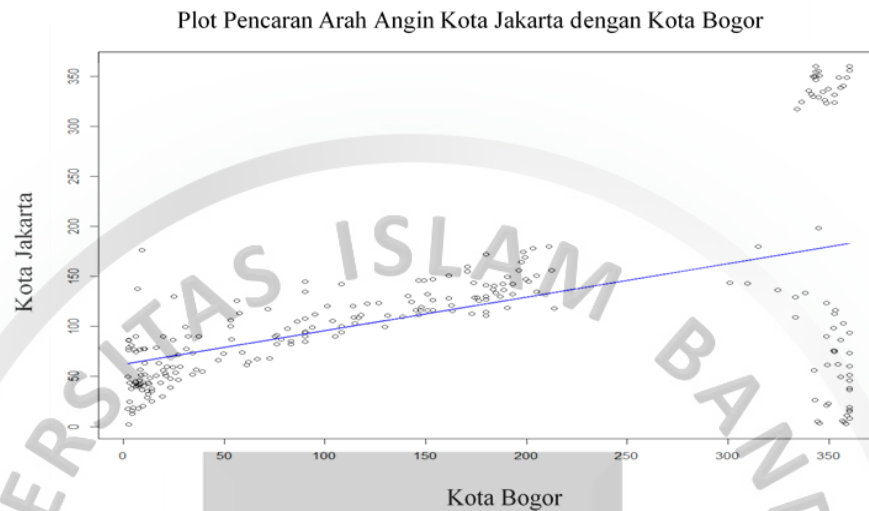
Dalam sub bab ini akan dibahas mengenai deskripsi data arah angin di Kota Jakarta dan Kota Bogor. Data yang terdapat pada Tabel 3.1 menyajikan data arah angin di Kota Jakarta dan Kota Bogor pada tahun 2019 yang kemudian disajikan dalam tabel statistik deskriptif pada Tabel 4.1 sebagai berikut:

Tabel 4.1 Hasil Statistik Deskriptif Arah Angin di Kota Jakarta dan Kota Bogor

	Minimum	Maksimum	Rata-rata	Ragam
Jakarta	2,39	360	79,16	33,62
Bogor	2,16	360	29,64	21,52

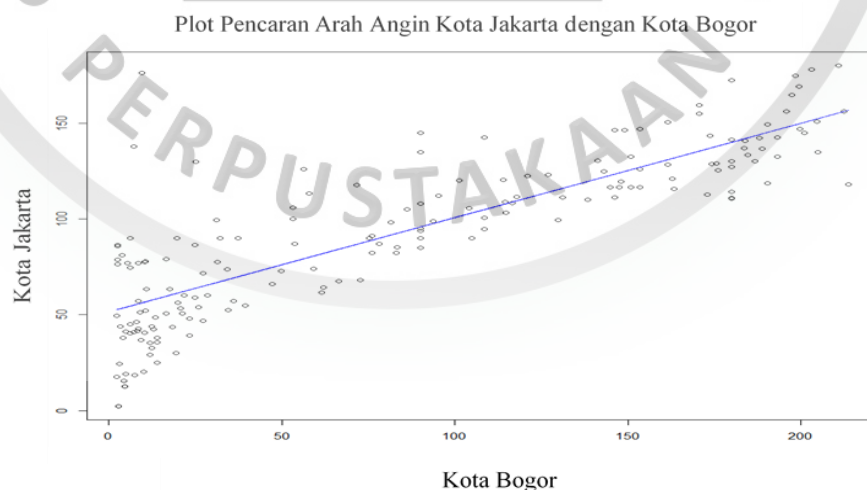
Dari hasil tabel statistik deskriptif di atas dapat dikatakan bahwa nilai minimum arah angin untuk Kota Jakarta sebesar 2,39 derajat dan nilai minimum untuk Kota Bogor sebesar 2,16 derajat, sedangkan untuk nilai maksimum dari kedua kota baik Kota Jakarta maupun Kota Bogor sama yakni sebesar 360 derajat. Adapun rata-rata arah angin untuk Kota Jakarta yaitu sebesar 79,16 derajat dan Kota Bogor sebesar 29,64 derajat, atau dengan kata lain rata-rata arah angin di Kota Jakarta cenderung kearah timur, sedangkan rata-rata arah angin di Kota Bogor cenderung kearah timur

timur laut. Ragam untuk Kota Jakarta sebesar 33,62 derajat, sedangkan untuk Kota Bogor sebesar 21,52 derajat, atau dengan kata lain, arah angin Kota Bogor lebih seragam dibandingkan dengan arah angin di Kota Jakarta. Adapun data pada tabel 3.1 tersaji dalam bentuk plot pencaran hasil output *software* R sebagai berikut:



Gambar 4.1 Plot Pencaran 240 Data Arah Angin Kota Jakarta dengan Kota Bogor

Dari hasil plot pencaran di atas terlihat bahwa terdapat beberapa pencilan, sehingga dalam perhitungan hanya menggunakan 172 data pengamatan, sedangkan pencilan tersebut tidak dilibatkan dalam analisis. Adapun plot pencaran 172 data pengamatan yang digunakan untuk perhitungan sebagai berikut:



Gambar 4.2 Plot Pencaran 172 Data Arah Angin Kota Jakarta dengan Kota Bogor

Setelah sebagian data tidak dilibatkan, dari gambar di atas dapat dilihat bahwa pencaran titik cenderung mengikuti garis linier.

4.3 Analisis Regresi Sirkular Sederhana dengan Sisaan Berdistribusi Wrapped Cauchy

4.3.1 Penaksiran Parameter Regresi Sirkular Sederhana

Dalam sub bab ini akan dibahas mengenai hasil penaksiran parameter regresi sirkular sederhana dengan sisaan berdistribusi wrapped Cauchy. Seperti yang telah dipaparkan pada Bab II untuk menaksir parameter regresi sirkular sederhana dengan metode penaksiran kemungkinan maksimum menggunakan algoritma iterasi *re-weighting*. Untuk memudahkan perhitungan, digunakan *software R*, dimana program dari perhitungan penaksir parameter, ragam penaksir parameter, serta selang kepercayaan dari penaksir parameter disajikan pada Lampiran 3. Adapun nilai-nilai yang diperlukan untuk melakukan iterasi pertama yakni diambil 0.3 masing-masing untuk nilai $\hat{\alpha}_1$ dan $\hat{\alpha}_2$, serta 0,492 untuk nilai $\hat{\beta}$. Kemudian hitung nilai c menggunakan Persamaan (2.23 a) dan w_i menggunakan Persamaan (2.30) sebagai berikut:

$$c = \sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} = \sqrt{1 - 0,3^2 - 0,3^2} = 0,9055$$

dan

$$\begin{aligned} w_1 &= (1 - \alpha_1 \cos(y_1 - \beta x_1) - \alpha_2 \sin(y_1 - \beta x_1))^{-1} \\ &= (1 - 0,3 \cos(2,4775 - 0,492(3,1416)) - 0,3 \sin(2,4775 - 0,492(3,1416)))^{-1} \\ &= 1,6894 \end{aligned}$$

dan lakukan hal yang sama untuk w_2, w_3, \dots, w_{172} . Nilai-nilai w_i untuk setiap iterasi disajikan pada Lampiran 4. Kemudian, dengan menggunakan Persamaan (2.28), (2.29), dan (2.36), didapat:

$$\hat{\alpha}_1^{[1]} = \frac{c^2}{n} \sum_i w_i \cos(y_i - \beta x_i)$$

$$= \frac{0,9055^2}{172} \left[\begin{array}{l} 1,6894 \cos(2,2752 - 0,492 \times 2,4668) + \dots + \\ 1,7225 \cos(1,9467 - 0,492 \times 2,0553) \end{array} \right]$$

$$= 0,6047$$

$$\hat{\alpha}_2^{[1]} = \frac{c^2}{n} \sum_i w_i \sin(y_i - \beta x_i)$$

$$= \frac{0,9055^2}{172} \left[\begin{array}{l} 1,6894 \sin(2,2752 - 0,492 \times 2,4668) + \dots + \\ 1,7225 \sin(1,9467 - 0,492 \times 2,0553) \end{array} \right]$$

$$= 0,7193$$

$$\hat{\beta}^{[1]} = \hat{\beta}^{[0]} + \frac{\sum_i x_i (\alpha_1 \sin(y_i - \beta^{[0]} x_i) - \alpha_2 \cos(y_i - \beta^{[0]} x_i))}{\sum_i x_i^2 (\alpha_1 \cos(y_i - \beta^{[0]} x_i) + \alpha_2 \sin(y_i - \beta^{[0]} x_i))}$$

$$= 0,492 + \frac{\left[\begin{array}{l} 2,4668 (0,3 \sin(2,2752 - 0,492 \times 2,4668) - 0,3 \cos(2,2752 - 0,492 \times 2,4668)) + \dots + \\ 2,0553 (0,3 \sin(1,9467 - 0,492 \times 2,0553) - 0,3 \cos(1,9467 - 0,492 \times 2,0553)) \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{l} 2,4669^2 (0,3 \sin(2,2752 - 0,492 \times 2,4668) + 0,3 \sin(2,2752 - 0,492 \times 2,4668)) + \dots + \\ 2,0553^2 (0,3 \sin(1,9467 - 0,492 \times 2,0553) + 0,3 \sin(1,9467 - 0,492 \times 2,0553)) \end{array} \right]}$$

$$= 0,4916$$

Dengan menggunakan persamaan yang sama, ulangi menghitung nilai $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, dan $\hat{\beta}$ sampai nilai-nilai tersebut konvergen pada iterasi ke-45. Lebih rinci untuk nilai $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, dan $\hat{\beta}$ untuk iterasi ke-2 sampai ke-45 disajikan pada Lampiran 5. Dengan menggunakan *software R*, nilai yang konvergen untuk $\hat{\alpha}_1$ sebesar 0,7308, $\hat{\alpha}_2$ sebesar 0,6583, dan $\hat{\beta}$ sebesar 0,5316. Dari nilai yang telah diperoleh tersebut, kemudian dilanjutkan untuk menghitung nilai $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\rho}$ dengan menggunakan Persamaan (2.37) dan (2.38), dan hasil yang didapatkan sebagai berikut:

$$\hat{\alpha} = \tan^{-1} \left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0,6583}{0,7308} \right) = 0,7333$$

$$\hat{\rho} = \frac{1 - \sqrt{1 - \hat{\alpha}_1^2 - \hat{\alpha}_2^2}}{\sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 0,7308^2 - 0,6583^2}}{\sqrt{0,7308^2 + 0,6583^2}} = 0,8334$$

Dengan demikian diperoleh penaksir parameter regresi sirkular sederhana, yakni $\hat{\alpha}$ sebesar 0,7333 dan $\hat{\beta}$ sebesar 0,5316 serta $\hat{\rho}$ sebagai penaksir parameter konsentrasi sebesar 0,8334. Model regresi yang didapat adalah $\hat{y}_i = 0,7333 + 0,5316 x_i$.

Misalkan arah angin kota Bogor yang diperoleh sebesar 180° atau dalam radian sebesar 3,1416, maka diprediksi arah angin kota Jakarta akan naik sebesar 0,5316. Sehingga, arah angin Kota Jakarta akan bernilai sebesar $137,703^\circ$ atau dalam radian sebesar 2,4034. Dari model yang didapat, diperoleh nilai sisaan yang disajikan pada Lampiran 6 serta plot sisaan disajikan pada Lampiran 7. Kemudian nilai sisaan yang diperoleh diuji menggunakan uji kolmogorov-smirnov pada Lampiran 7, maka diperoleh nilai D sebesar 0,0974 atau dengan p -value sebesar $0,0765 > \gamma = 0,05$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa sisaan berdistribusi wrapped Cauchy yang didukung pula dengan parameter konsentrasi $\rho > 0,8$ sesuai yang diharapkan. Adapun untuk asumsi homogenitas ragam dan autokorelasi antar sisaan, dimana hasil yang diperoleh disajikan dalam bentuk plot, masing-masing pada Lampiran 8 dan Lampiran 9. Dari kedua hasil plot terlihat terlihat bahwa masing-masing asumsi terpenuhi.

4.3.2 Ragam Asimptotik dari Penaksiran Parameter Regresi Sirkular Sederhana

Metode *bootstrapping* digunakan untuk memperoleh pendekatan ragam dari penaksir parameter. Langkah awal yang dilakukan yaitu *resampling* sebanyak 80 kali yang diambil secara acak dari 172 data pengamatan. Kemudian hitung nilai $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ dan $\hat{\rho}$ untuk pasangan data yang terpilih, hasil yang didapat dengan menggunakan *software* R sebagai berikut:

Tabel 4.2 Nilai α , β dan ρ dari Hasil *Resampling*

<i>Resampling ke-</i>	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$	<i>Resampling ke-</i>	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$
1	0,7899	0,5207	0,8475	41	0,7301	0,5168	0,8292
2	0,7348	0,5600	0,8278	42	0,6848	0,5428	0,8526
3	0,8409	0,4791	0,8096	43	0,7044	0,5326	0,8121
4	0,7755	0,5248	0,8142	44	0,7174	0,5373	0,8102
5	0,7955	0,5087	0,8505	45	0,7958	0,5110	0,8118

Bersambung

Sambungan

<i>Resampling ke-</i>	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$	<i>Resampling ke-</i>	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$
6	0,7518	0,5468	0,8087	46	0,7042	0,5379	0,8419
7	0,7635	0,5170	0,8413	47	0,7416	0,5360	0,8121
8	0,7110	0,5347	0,8241	48	0,7965	0,5148	0,8484
9	0,7362	0,5259	0,8419	49	0,6969	0,5415	0,841
10	0,7480	0,5448	0,8392	50	0,7503	0,5165	0,8309
11	0,8025	0,4965	0,8218	51	0,6822	0,5478	0,8399
12	0,7040	0,5333	0,8590	52	0,7015	0,5697	0,7954
13	0,7118	0,5498	0,8138	53	0,7023	0,5295	0,8172
15	0,7261	0,5578	0,8226	55	0,7119	0,5467	0,8312
16	0,7352	0,5257	0,8316	56	0,8008	0,5211	0,8146
17	0,7811	0,5174	0,8346	57	0,7291	0,5192	0,8454
18	0,8671	0,4819	0,8238	58	0,7344	0,5322	0,8208
19	0,7630	0,5376	0,8063	59	0,7091	0,5577	0,8307
20	0,7624	0,5373	0,8217	60	0,7222	0,5442	0,8258
21	0,7135	0,5456	0,8424	61	0,7532	0,5209	0,8619
22	0,7352	0,5375	0,8382	62	0,7099	0,5453	0,8382
23	0,6715	0,5462	0,8556	63	0,706	0,5411	0,8414
24	0,6992	0,5421	0,8386	64	0,735	0,5297	0,8304
25	0,7537	0,5161	0,8167	65	0,7553	0,5292	0,8254
26	0,7047	0,5544	0,8172	66	0,7577	0,5161	0,8583
27	0,6492	0,5451	0,8730	67	0,7349	0,5185	0,8444
28	0,8210	0,5000	0,8380	68	0,7821	0,5296	0,8222
29	0,7234	0,5357	0,8257	69	0,7264	0,5453	0,818
30	0,7013	0,5377	0,8365	70	0,7156	0,5355	0,8429
31	0,8210	0,5091	0,8070	71	0,6991	0,5573	0,8215
32	0,7357	0,5511	0,8253	72	0,7585	0,5208	0,8366
33	0,7057	0,5364	0,8571	73	0,7335	0,5386	0,8303
34	0,7403	0,5354	0,8490	74	0,75	0,52	0,8014
35	0,7486	0,5142	0,8548	75	0,8395	0,4791	0,8102
36	0,8138	0,4946	0,8093	76	0,6997	0,5517	0,8285
37	0,6888	0,5696	0,8117	77	0,7027	0,5314	0,8412
38	0,7068	0,5376	0,8384	78	0,7131	0,5462	0,8361
39	0,7727	0,5094	0,8451	79	0,7753	0,5139	0,8417
40	0,7715	0,5229	0,8352	80	0,665	0,5918	0,8286

Adapun nilai untuk $\bar{\alpha} = 0,7396$, $\bar{\beta} = 0,5315$, dan $\bar{\rho} = 0,8314$, kemudian

hitung nilai ragam untuk masing-masing penaksir parameter, baik untuk $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ dan $\hat{\rho}$ sebagai berikut:

$$\text{ragam}(\hat{\alpha}) = \frac{1}{79} \sum_{j=1}^{80} (\hat{\alpha}_j - \bar{\alpha})^2 = \frac{1}{79} [(0,7899 - 0,7396)^2 + \dots + (0,7396 - 0,7396)^2] = 0,0013$$

$$\text{ragam}(\hat{\beta}) = \frac{1}{59} \sum_{j=1}^{60} (\hat{\beta}_j - \bar{\beta})^2 = \frac{1}{79} [(0,5207 - 0,5315)^2 + \dots + (0,5918 - 0,5315)^2] = 0,0003$$

$$\text{ragam}(\hat{\rho}) = \frac{1}{59} \sum_{j=1}^{60} (\hat{\rho}_j - \bar{\rho})^2 = \frac{1}{79} [(0,8475 - 0,8314)^2 + \dots + (0,8286 - 0,8314)^2] = 0,0003$$

Sehingga didapat ragam untuk penaksir parameter $\hat{\alpha}$ sebesar 0,0013, $\hat{\beta}$ sebesar 0,0003, serta $\hat{\rho}$ sebesar 0,0003. Dapat dikatakan bahwa nilai dari ketiga penaksir parameter $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, dan $\hat{\rho}$ masing-masing hampir sama.

4.3.3 Selang Kepercayaan Penaksir Parameter Regresi Sirkular Sederhana

Penaksir parameter yang didapat dengan metode *bootstrap* yang telah didapat dari hasil menaksir ragam sebelumnya, kemudian diurutkan dari yang terkecil ke yang terbesar sebagai berikut:

Tabel 4.3 Urutan Nilai α , β dan ρ dari Hasil *Resampling*

Urutan	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$	Urutan	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$
1	0,6492	0,4791	0,7954	41	0,7349	0,5354	0,8309
2	0,665	0,4791	0,8014	42	0,735	0,5355	0,8312
3	0,6715	0,4819	0,8063	43	0,7352	0,5357	0,8316
4	0,6822	0,4946	0,807	44	0,7352	0,536	0,8346
5	0,6848	0,4965	0,8087	45	0,7357	0,5364	0,8352
6	0,6888	0,5	0,8093	46	0,7362	0,5373	0,8361
7	0,6969	0,5087	0,8096	47	0,7403	0,5373	0,8365
8	0,6991	0,5091	0,8102	48	0,7416	0,5375	0,8366
9	0,6992	0,5094	0,8102	49	0,748	0,5376	0,838
10	0,6997	0,511	0,8117	50	0,7486	0,5376	0,8382
11	0,7013	0,5139	0,8118	51	0,75	0,5376	0,8382
12	0,7015	0,5142	0,8121	52	0,7503	0,5377	0,8384
13	0,7023	0,5148	0,8121	53	0,7518	0,5379	0,8386
14	0,7027	0,5161	0,8138	54	0,7532	0,5386	0,8392
15	0,704	0,5161	0,8142	55	0,7537	0,5411	0,8399
16	0,7042	0,5165	0,8146	56	0,7541	0,5415	0,841
17	0,7044	0,5168	0,8167	57	0,7553	0,5421	0,8412
18	0,7047	0,517	0,8172	58	0,7577	0,5428	0,8413
19	0,7057	0,5174	0,8172	59	0,7585	0,5442	0,8414
20	0,706	0,5185	0,818	60	0,7624	0,5448	0,8417
21	0,7068	0,5192	0,8208	61	0,763	0,5451	0,8419
22	0,7091	0,52	0,8215	62	0,7635	0,5453	0,8419
23	0,7092	0,5207	0,8217	63	0,7715	0,5453	0,8424

Bersambung

Sambungan

Urutan	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$	Urutan	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$
24	0,7099	0,5208	0,8218	64	0,7727	0,5456	0,8429
25	0,711	0,5209	0,8222	65	0,7753	0,5462	0,8444
26	0,7118	0,5211	0,8226	66	0,7755	0,5462	0,8451
27	0,7119	0,5229	0,8238	67	0,7811	0,5467	0,8454
28	0,7131	0,5248	0,8241	68	0,7821	0,5468	0,8475
29	0,7135	0,5257	0,8253	69	0,7899	0,5478	0,8484
30	0,7156	0,5259	0,8254	70	0,7955	0,5498	0,849
31	0,7174	0,5286	0,8257	71	0,7958	0,5511	0,8505
32	0,7222	0,5292	0,8258	72	0,7965	0,5517	0,8526
33	0,7234	0,5295	0,8278	73	0,8008	0,5544	0,8548
34	0,7261	0,5296	0,8283	74	0,8025	0,5573	0,8548
35	0,7264	0,5297	0,8285	75	0,8138	0,5577	0,8556
36	0,7291	0,5314	0,8286	76	0,821	0,5578	0,8571
37	0,7301	0,5322	0,8292	77	0,821	0,56	0,8583
38	0,7335	0,5326	0,8303	78	0,8395	0,5696	0,859
39	0,7344	0,5333	0,8304	79	0,8409	0,5697	0,8619
40	0,7348	0,5347	0,8307	80	0,8671	0,5918	0,873

Karena pengulangan yang dilakukan sebanyak 80 kali, maka batas bawah selang kepercayaan 95% untuk masing-masing penaksir parameter berada pada urutan ke-2, sedangkan batas atas selang kepercayaan 95% untuk masing-masing penaksir parameter berada pada urutan ke-79, sehingga:

$$0,6650 \leq \hat{\alpha} \leq 0,8409 \quad 0,4791 \leq \hat{\beta} \leq 0,5697 \quad 0,8014 \leq \hat{\rho} \leq 0,8619$$

Maka, selang kepercayaan bagi penaksir parameter $\hat{\alpha}$ yaitu diantara 0,6650 sampai dengan 0,8409, $\hat{\beta}$ yaitu diantara 0,4791 sampai dengan 0,5697, dan $\hat{\rho}$ yaitu diantara 0,8014 sampai dengan 0,8619. Karena ketiga penaksir parameter tidak mengandung 0, maka dapat disimpulkan bahwa penaksir parameter signifikan.