BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Program Linear

Program Linear adalah suatu cara yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi suatu model linear dengan berbagai kendala yang dihadapinya. Masalah program linear ini berkembang pesat setelah ditemukan suatu metode penyelesaian program linear dengan metode simpleks yang dikemukakan oleh George Dantzig pada tahun 1947. Selanjutnya, berbagai cara dan metode dikembangkan untuk menyelesaikan masalah program linear bahkan sampai pada masalah riset operasi hingga tahun 1950an seperti pemrograman dinamik, teori antrian, dan teori persediaan.

Program Linear banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dalam industri, perbankkan, pendidikan dan masalah-masalah lain yang dapat dinyatakan dalam bentuk linear. Bentuk linear di sini berarti bahwa seluruh fungsi dalam model ini merupakan fungsi linear.

Tujuan utama dari program linear ini adalah menentukan nilai optimum (maksimal/minimal) dari fungsi tujuan yang telah ditetapkan. Secara umum, fungsi pada model ini ada dua macam, yaitu fungsi tujuan dan fungsi pembatas/kendala.

1. Fungsi tujuan adalah fungsi yang menggambarkan tujuan/sasaran di dalam program linear yang dimaksudkan untuk menentukan nilai optimum dari

fungsi tersebut yaitu nilai maksimal untuk masalah keuntungan dan nilai minimal untuk masalah biaya.

2. Fungsi pembatas merupakan bentuk penyajian secara matematika yang diperlukan berkenaan dengan adanya keterbatasan sumber daya yang tersedia, misalnya jumlah bahan baku yang terbatas, waktu kerja, jumlah tenaga kerja, luas gudang persediaan.

Optimasi adalah salah satu disiplin ilmu yang dalam penerapannya difokuskan untuk mendapatkan nilai minimum atau maksimum secara sistematis dari suatu fungsi, peluang, maupun pencarian nilai lainnya dalam berbagai kasus. Dalam kehidupan sehari-hari, baik disadari maupun tidak, orang selalu melakukan optimisasi untuk memenuhi kebutuhannya. Optimisasi yang dilakukan oleh masyarakat awam lebih banyak didasari oleh intuisi daripada teori optimisasi. Sering kali kita dihadapkan pada persoalan mencari penyelesaian terbaik dengan memenuhi segala kendala yang ada.

Persoalan Program Linear dibagi menjadi dua kelompok, yaitu Program Linear satu tujuan dan Program Linear *Multi-Objective*.

Dalam masalah optimasi program linear, diberikan formula sebagai berikut:

$$\text{Max/Min } z = f(\boldsymbol{x})$$

Dengan kendala

$$g_i(\boldsymbol{x})(\leq)(=)(\geq)b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0$$

Dimana $\boldsymbol{x} \in R^n$ merupakan suatu vektor dengan n variabel, $f(\boldsymbol{x})$ merupakan fungsi objektif, dan $g_i(\boldsymbol{x})$ pertidaksamaan dengan m kendala yang memiliki solusi yang layak. Kita biasanya menunjukkan daerah yang layak dalam ruang keputusan oleh himpunan S, sebagai berikut:

$$S = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \ldots, m, x \geq 0 \right\}$$

Adapun metode penyelesaian Program Linear yang dapat digunakan dalam memperoleh suatu solusi yang optimum, yaitu:

1. Metode Grafik

   Penyelesaian masalah program Linier dengan menggunakan metode grafis pada umumnya mengikuti langkah-langkah sebagai berikut :

   a. Merumuskan masalah asli menjadi model matematika yang sesuai dengan syarat-syarat yang diperlukan dalam model Program Linier, yaitu mempunyai fungsi tujuan, fungsi kendala, syarat ikatan non-negatif.
   b. Kendala-kendala yang ada digambar hingga dapat diperoleh daerah penyelesaian (Daerah yang Memenuhi Kendala (DMK)/Wilayah Kelayakan)/Daerah Fisibel yang titik-titik sudutnya diketahui dengan jelas.
   c. Nilai fungsi sasaran (fungsi tujuan) dihitung di setiap titik sudut daerah penyelesaian.
   d. Dipilih nilai yang sesuai dengan fungsi tujuan (kalau memaksimumkan berarti yang nilainya terbesar dan sebaliknya).
   e. Jawaban soal asli sudah diperoleh.

Metode ini memiliki kelebihan dan kekurangan. Kelebihannya yaitu mudah dalam pengerjaannya, metodenya menggunakan metode substitusi, dan permasalahan yang diselesaikannya cukup sederhana. Sedangkan kekurangan dari metode ini yaitu hanya dapat menyelesaikan maksimal 2 variabel.

2. Metode Simpleks

Metode simpleks merupakan prosedur aljabar yang bersifat *iteratif*, yang bergerak selangkah demi selangkah, di mulai dari suatu titik ekstrim pada daerah fisibel menuju titik ekstrim yang optimum.

Kelebihan dari metode ini yaitu dapat menyelesaikan persoalan program linear dengan multi variabel. Sedangkan kekurangannya yaitu pengerjaannya yang sedikit rumit karena dibutuhkan ketelitian dan apabila dalam perhitungan manual semakin rumit, maka dibutuhkan aplikasi bantuan/software.

Sering kita menemukan bahwa fungsi kendala tidak hanya dibentuk oleh pertidaksamaan $\leq$ tapi juga oleh pertidaksamaan $\geq$ dan/atau persamaan (=). Fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\geq$ mempunyai *surplus variable*, tidak ada *slack variables*. *Surplus variable* tidak bisa menjadi variabel basis awal. Dengan demikian harus ditambahkan satu variabel baru yang dapat berfungsi sebagai variabel basis awal. Variabel yang dapat berfungsi sebagai variabel basis awal hanya *slack variables* dan *artificial variables* (variabel buatan).

Jika semua fungsi kendala menggunakan pertidaksamaan $\leq$ maka variabel basis awal semuanya adalah *slack variables*. Penyelesaian solusi optimal untuk kasus seperti ini dilakukan dengan cara metode simpleks biasa.

Jika fungsi kendala ada yang menggunakan pertidaksamaan $\geq$ maka variabel basis awal adalah *slack variables* dan/atau variabel buatan. Penyelesaian solusi optimal untuk kasus seperti ini dilakukan dengan memilih antara metode Big M atau Dua Fase.

Jika fungsi kendala ada yang menggunakan persamaan maka variabel buatan akan ditemukan pada variabel basis awal. Penyelesaian solusi optimal untuk kasus seperti ini hanya dapat dilakukan dengan memilih antara metode Big M atau Dua Fase.

2.2 Program Linear *Multi-Objective*

Salah satu jenis masalah optimisasi yang sering kita jumpai adalah masalah persoalan *Multi-Objective*. Misalnya, *design* sistem *hardware/software* yang dapat ditemukan pada telepon genggam, mobil, dan sebagainya. Seringkali diharapkan pembiayaan pada sistem yang dibuat menjadi minimal sedangkan performa sistemnya menjadi maksimal. Dari masalah ini dapat dipisahkan menjadi dua masalah optimisasi yakni meminimalkan biaya dan memaksimalkan kinerja sistem hardware. Masalah dengan lebih dari satu tujuan optimisasi inilah yang disebut sebagai masalah optimisasi *Multi-Objective*.

Persoalan program linear *multi-objective* yaitu persoalan program linear yang memiliki fungsi tujuan lebih dari satu. Persoalan program linear *multi-objective* ini terjadi jika beberapa kasusnya terdiri dari beberapa fungsi tujuan yang akan dioptimasikan (maksimum/minimum). Dalam penyelesaiannya, persoalan program linear *multi-objective* harus diubah menjadi persoalan program linear satu tujuan.

Salah satu contoh persoalan *multi-objective* dalam kehidupan sehari-hari yaitu misalkan suatu perusahaan menghasilkan 3 macam produk. Untuk menghasilkan produk I dibutuhkan 1 kg bahan I dan 2 kg bahan II. Untuk menghasilkan produk II dibutuhkan 2 kg bahan I dan 2 kg bahan II. Untuk menghasilkan produk III dibutuhkan 1 kg bahan I dan 3 kg bahan II. Banyaknya bahan baku yang tersedia adalah bahan I sebanyak 10 kg dan bahan II sebanyak 15 kg. Keuntungan untuk produk I sebesar Rp.20.000/buah, produk II sebesar Rp. 30.000/buah, dan produk III sebesar Rp. 27.000/buah. Tetapi, selama pengerjaannya, perusahaan tersebut menghasilkan limbah Rp. 5.000 untuk produk I, limbah Rp. 10.000 untuk produk II, dan limbah Rp. 8.000 untuk produk III. Perusahaan ini ingin memaksimalkan keuntungan yang diperoleh tetapi juga ingin meminimumkan limbah yang dihasilkan.

Model matematika dari persoalan diatas dapat dibuat dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 2.1

Persoalan Program Linear *Multi-Objective*

PRODUK	BAHAN		KEUNTUNGAN (Rp.)	LIMBAH (Rp.)
	Bahan I (kg)	Bahan II (kg)		
Produk I	1	2	20.000	5.000
Produk II	2	2	30.000	10.000
Produk III	1	3	27.000	8.000
Bahan baku yang tersedia	10	15		

Kasus ini dapat diformulasikan dengan bentuk persamaan *multi-objective* sebagai berikut:

x_1 =Produk I

x_2 =Produk II

x_3 =Produk III

Maksimumkan $z_1 = 20x_1 + 30x_2 + 27x_3$

Minimumkan $z_2 = 5x_1 + 10x_2 + 8x_3$

Dengan kendala

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$