

BAB III

PEMBAHASAN

Model matematika aliran pasir dalam minyak dapat ditulis dalam suatu persamaan sebagai berikut :

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right)_{LS} = F_D + F_W + F_{S,S} + F_{G,m} + F_{TM} \quad (3.1)$$

Pada model matematika aliran pasir dalam minyak tersebut didasarkan oleh beberapa faktor gaya per satuan volume yang terdapat dalam suatu segmen pipa. Gaya-gaya tersebut meliputi gaya drag antara partikel pasir dengan minyak (F_D), gaya gesek dinding pipa dengan aliran fluida (F_W), gaya interaksi partikel pasir ($F_{S,S}$), gaya gravitasi ($F_{G,m}$), gaya aliran turbulen antara partikel pasir dengan minyak (F_{TM}).

Model perubahan tekanan pada aliran minyak-pasir tersebut selanjutnya akan dikembangkan sehingga dapat dipergunakan dalam jaringan pipa kompleks. Pengembangan model aliran pasir dalam minyak ini menggunakan beberapa asumsi sebagai berikut :

- a) Fase padat berupa partikel pasir.
- b) Terjadi pada pipa horizontal sehingga sudut elevasi pipa diabaikan ($\theta = 0$).
- c) Fase gas diabaikan.
- d) Fase padat dan cair bersifat tak termampatkan (*incompressible*). Tak termampatkan (*incompressible*) adalah aliran fluida yang dicirikan dengan

tidak berubahnya besaran kerapatan (densitas) dari fluida di sepanjang aliran tersebut.

- e) Kondisi aliran tunak (*steady state*). Aliran tunak (*steady state*) merupakan aliran yang kecepatannya tidak terpengaruh oleh perubahan waktu, sehingga kecepatan konstan pada setiap titik (tidak mempunyai percepatan).
- f) Suhu pada setiap aliran adalah konstan (isothermal).
- g) Kerugian minor (*minor lossess*) diabaikan. Kerugian minor (*minor lossess*) adalah kerugian yang disebabkan oleh komponen-komponen pipa seperti katup, belokan, dan sambungan T.
- h) Komposisi fluida di sepanjang sistem adalah seragam (*uniform*). Kondisi seragam (*uniform*) yang dimaksud adalah kondisi dimana setiap komposisi aliran tidak berubah di sepanjang aliran pipa.
- i) Campuran minyak dan pasir diasumsikan ke dalam jenis fluida Newtonian. Fluida Newtonian adalah suatu jenis fluida yang memiliki gaya seret dan gradien kecepatan yang linear. Fluida Newtonian akan terus-menerus mengalir sekalipun terdapat gaya yang bekerja pada fluida karena viskositas fluida ini tidak berubah ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Viskositas akan berubah jika terjadi perubahan suhu.

3.1 Penyusunan Model Matematika Bello untuk Aliran Pasir dalam Minyak

Dari model aliran minyak – pasir pada persamaan 3.1, perubahan tekanan minyak – pasir dipengaruhi oleh gaya drag antara partikel pasir dengan minyak

(F_D), gaya gesek dinding pipa dengan aliran fluida (F_W), gaya interaksi partikel pasir ($F_{S,S}$), gaya gravitasi ($F_{G,m}$), gaya aliran turbulen antara partikel pasir dengan minyak (F_{TM}).

Pengembangan model ini dilakukan menggunakan Hukum Kekekalan Massa sehingga dapat menggunakan prinsip Hukum Kirchoff I dimana jumlah laju alir massa yang masuk (W_{Masuk}) sama dengan jumlah laju alir massa yang keluar (W_{Keluar}). Oleh karena itu, untuk pengembangan model aliran pasir dalam minyak harus dicari laju alir massa untuk setiap gaya.

3.1.1 Modifikasi Model Matematika pada Gaya Drag (F_D)

Aliran minyak dan pasir mengalir melalui suatu jaringan pipa. Pada aliran tersebut terdapat suatu gaya drag antara partikel pasir dan minyak. Gaya drag dapat ditulis dalam suatu persamaan sebagai berikut :

$$F_D = \beta (u_L - u_S) \quad (3.2)$$

Nilai β didapat dari penjabaran rumus sebagai berikut :

$$\beta = \frac{3}{4} C_D \frac{H_S \rho_S}{d} (u_L - u_S) (H_S)^{-2,65} \quad (3.3)$$

dengan : C_D = Koefisien hambatan

d = Diameter partikel pasir (m)

ρ_S = Massa jenis fasa solid (kg/m^3)

H_S = Fraksi volumetrik fluida fasa solid

Persamaan 3.3 disubstitusi ke persamaan 3.2 sehingga menjadi :

$$F_D = \frac{3}{4} C_D \frac{H_S \rho_S}{d} (u_L - u_S)^2 (H_S)^{-2,65} \quad (3.4)$$

Pada persamaan 3.4 terdapat $u_L - u_S$. Menggunakan persamaan 2.5 dan 2.6, persamaan $u_L - u_S$ dapat diubah menjadi :

$$u_L - u_S = \frac{Q_L}{A \rho_L} - \frac{Q_S}{A \rho_S} \quad (3.5)$$

Karena $Q_L = H_L \frac{W_T}{\rho_m}$ dan $Q_S = H_S \frac{W_T}{\rho_m}$, persamaan 3.5 dapat diubah menjadi :

$$\begin{aligned} u_L - u_S &= \frac{Q_L}{A \rho_L} - \frac{Q_S}{A \rho_S} \\ &= \frac{H_L W_T}{A \rho_L \rho_m} - \frac{H_S W_T}{A \rho_S \rho_m} \\ &= W_T \left(\frac{H_L}{A \rho_L \rho_m} - \frac{H_S}{A \rho_S \rho_m} \right) \\ &= \frac{W_T}{A \rho_m} \left(\frac{H_L}{\rho_L} - \frac{H_S}{\rho_S} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Substitusi persamaan 3.6 ke dalam persamaan 3.4 sehingga menjadi :

$$\begin{aligned} F_D &= \frac{3}{4} C_D \frac{H_S \rho_S}{d} (u_L - u_S)^2 (H_S)^{-2,65} \\ &= \frac{3}{4} C_D \frac{H_S \rho_S}{d} \left(\frac{W_T}{A \rho_m} \right)^2 \left(\frac{H_L}{\rho_L} - \frac{H_S}{\rho_S} \right)^2 (H_S)^{-2,65} \end{aligned} \quad (3.7)$$

dengan : W_T = Laju aliran massa total (kg/s)

A = Luas penampang pipa (m^2)

ρ_m = Massa jenis campuran (kg/m^3)

ρ_L = Massa jenis fasa liquid (kg/m^3)

H_L = Fraksi volumetrik fluida fasa liquid

Pada persamaan 3.7 :

$$\text{Misalkan : } C_1 = \frac{3}{4} C_D \frac{H_S \rho_S}{d} \frac{1}{(A \rho_m)^2} \left(\frac{H_L}{\rho_L} - \frac{H_S}{\rho_S} \right)^2 (H_S)^{-2,65}$$

Jadi, model matematika pada gaya drag pada aliran pasir dalam minyak :

$$F_D = C_1 W_T^2 \quad (3.8)$$

3.1.2 Modifikasi Model Matematika pada Gaya Gesek Dinding Bagian Dalam Pipa (F_W)

Pada model ini terjadi suatu gesekan antara fasa campuran, yaitu fasa minyak dan fasa partikel pasir dengan dinding bagian dalam pipa. Jumlah penurunan suatu tekanan yang disebabkan oleh suatu gesekan dapat dinyatakan dalam suatu persamaan :

$$F_W = \frac{2 \rho_m u_m^2}{D} (f_L + f_{SS} \cos(\theta)) \quad (3.9)$$

dengan : ρ_m = Massa jenis campuran (kg/m^3)
 u_m = Kecepatan campuran fluida (m/s)
 D = Diameter dalam pipa (m)
 θ = Sudut elevasi kemiringan

Karena $\theta = 0$, persamaan 3.9 menjadi :

$$F_W = \frac{2 \rho_m u_m^2}{D} (f_L + f_{SS}) \quad (3.10)$$

Faktor f_L merupakan suatu faktor gesekan antara permukaan dinding pipa dengan minyak.

$$f_L = \frac{64}{N_{Re,L}} \quad (3.11)$$

Bilangan $N_{Re,L}$ merupakan bilangan Reynolds pada minyak. Bilangan ini digunakan untuk mengidentifikasi jenis aliran yang berbeda, misalnya laminar dan turbulen.

$$N_{Re,L} = \frac{u_{SL} D \rho_L}{\mu_L} \quad (3.12)$$

dengan : u_{SL} = Kecepatan superfisial fluida fasa liquid (m/s)

μ_L = Viskositas minyak (Pa.s)

Persamaan 3.12 disubstitusi ke persamaan 3.11 sehingga menjadi :

$$\begin{aligned} f_L &= \frac{64}{\frac{u_{SL} D \rho_L}{\mu_L}} \\ &= \frac{\mu_L 64}{u_{SL} D \rho_L} \\ &= \frac{1}{u_{SL}} \frac{\mu_L 64}{D \rho_L} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Karena $u_{SL} = \frac{W_T H_L}{\rho_m A}$, persamaan 3.13 menjadi :

$$\begin{aligned} f_L &= \frac{1}{\frac{W_T H_L}{\rho_m A}} \frac{\mu_L 64}{D \rho_L} \\ &= \frac{\rho_m A \mu_L 64}{W_T H_L D \rho_L} \end{aligned} \quad (3.14)$$

dengan : W_T = Laju aliran massa total (kg/s)

ρ_L = Massa jenis fasa liquid (kg/m³)

H_L = Fraksi volumetrik fluida fasa liquid

Pada persamaan 3.14 :

Misalkan $\alpha = \frac{\rho_m A \mu_L 64}{H_L D \rho_L}$

Jadi didapat :

$$f_L = \frac{\alpha}{w_T} \quad (3.15)$$

Pada persamaan 3.10 terdapat f_{SS} yang merupakan suatu faktor gesekan antara permukaan dinding pipa dengan partikel pasir. Faktor f_{SS} dirumuskan sebagai berikut :

$$f_{SS} = \frac{0,046}{N_{Re,m}^{0,2}} \quad (3.16)$$

Bilangan $N_{Re,m}$ merupakan bilangan Reynolds untuk fluida campuran dan dirumuskan sebagai berikut :

$$N_{Re,m} = \frac{\rho_m u_m d}{\mu_L} \quad (3.17)$$

dengan : u_m = Kecepatan campuran fluida (m/s)

d = Diameter partikel pasir (m)

Kecepatan campuran fluida dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$u_m = \frac{4}{\pi D^2} \left[\frac{\rho_L Q_L + \rho_S Q_S}{\rho_m} \right] \quad (3.18)$$

Karena $Q_L = Q_T H_L$ dan $Q_S = Q_T H_S$, persamaan 3.18 dapat diubah menjadi :

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{4}{\pi D^2} \left[\frac{\rho_L Q_T H_L + \rho_S Q_T H_S}{\rho_m} \right] \\ &= \frac{4}{\pi D^2} Q_T \left[\frac{\rho_L H_L + \rho_S H_S}{\rho_m} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Luas permukaan pipa (A) berbentuk lingkaran. Luas Lingkaran adalah πr^2 atau $\frac{1}{4} \pi D^2$. Massa jenis campuran fluida terdiri dari minyak dan partikel pasir ($\rho_m = \rho_L H_L + \rho_S H_S$) sehingga persamaan 3.19 dapat diubah menjadi :

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{1}{A} Q_T \left(\frac{\rho_m}{\rho_m} \right) \\ &= \frac{Q_T}{A} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Karena $Q_T = \frac{W_T}{\rho_m}$, persamaan 3.20 dapat diubah menjadi :

$$u_m = \frac{W_T}{A \rho_m} \quad (3.21)$$

Persamaan 3.21 dapat disubstitusi ke persamaan 3.17 sehingga menjadi :

$$\begin{aligned} N_{Re,m} &= \frac{\rho_m u_m d}{\mu_L} \\ &= \frac{\rho_m \frac{W_T}{A \rho_m} d}{\mu_L} \\ &= \frac{W_T d}{A \mu_L} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substitusi persamaan 3.22 ke dalam persamaan 3.16 sehingga menjadi :

$$\begin{aligned} f_{SS} &= \frac{0,046}{N_{Re,m}^{0,2}} \\ &= \frac{0,046}{\left[\frac{W_T d}{A \mu_L} \right]^{0,2}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Pada persamaan 3.23, misalkan $\gamma = \frac{d}{A \mu_L}$, maka persamaan 3.23 berubah menjadi :

$$f_{SS} = \frac{0,046}{[W_T \gamma]^{0,2}} \quad (3.24)$$

Substitusi persamaan 3.24 dan persamaan 3.15 ke dalam persamaan 3.10 menjadi :

$$\begin{aligned} F_W &= \frac{2 \rho_m u_m^2}{D} (f_L + f_{SS}) \\ &= \frac{2 \rho_m u_m^2}{D} \left(\frac{\alpha}{W_T} + \frac{0,046}{[W_T \gamma]^{0,2}} \right) \\ &= \frac{2 \rho_m u_m^2}{D} \left(\frac{\alpha \gamma + 0,046 (\gamma W_T)^{0,8}}{\gamma W_T} \right) \\ &= \frac{2 \rho_m u_m^2}{D} \left(\frac{\alpha}{W_T} + \frac{0,046 (W_T)^{0,8}}{\gamma^{0,2} W_T} \right) \\ &= \frac{2 \rho_m u_m^2}{D} \frac{1}{W_T} \left(\alpha + \frac{0,046 (W_T)^{0,8}}{\gamma^{0,2}} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Karena $u_m = \frac{W_T}{A \rho_m}$, persamaan 3.25 menjadi :

$$\begin{aligned} F_W &= \frac{2 \rho_m \left(\frac{W_T}{A \rho_m} \right)^2}{D} \frac{1}{W_T} \left(\alpha + \frac{0,046 (W_T)^{0,8}}{\gamma^{0,2}} \right) \\ &= \frac{2 W_T}{A^2 D \rho_m} \left(\alpha + \frac{0,046 (W_T)^{0,8}}{\gamma^{0,2}} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pada persamaan 3.26 :

$$\text{Misalkan : } C_2 = \frac{2}{A^2 D \rho_m} ; C_3 = \alpha ; C_4 = \frac{0,046}{\gamma^{0,2}}$$

Jadi, model matematika pada gaya gesek pada aliran pasir dalam minyak :

$$F_W = C_2 W_T (C_3 + C_4 W_T^{0,8}) \quad (3.27)$$

3.1.3 Modifikasi Model Matematika pada Gaya Interaksi Partikel Pasir ($F_{s,s}$)

Gaya interaksi partikel pasir ($F_{s,s}$) per volume pada aliran pasir dalam minyak suatu jaringan pipa dapat ditulis sebagai berikut :

$$F_{s,s} = d^2 \frac{Q_s \rho_s}{D^2} \frac{u_{SL}}{\left(\frac{\pi D^3}{6} \right)} \quad (3.28)$$

dengan : d = Diameter partikel pasir (m)

Q_S = Laju aliran fasa solid (m^3/s)

ρ_S = Massa jenis fasa solid (kg/m^3)

D = Diameter dalam pipa (m)

u_{SL} = Kecepatan superfisial fluida fasa liquid (m/s)

Pada persamaan 3.28 terdapat Q_S dan u_{SL} . Karena $Q_S = \frac{W_T H_S}{\rho_m}$ dan $u_{SL} = \frac{W_T H_L}{\rho_m A}$,

persamaan 3.28 dapat diubah menjadi :

$$\begin{aligned} F_{S,S} &= d^2 \frac{\frac{W_T H_S}{\rho_m} \rho_S}{D^2} \frac{W_T H_L}{\rho_m A} \left(\frac{6}{\pi D^3} \right) \\ &= d^2 \frac{W_T^2 H_S \rho_S}{D^2} \frac{H_L}{\rho_m^2 A} \left(\frac{6}{\pi D^3} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Pada persamaan 3.29 :

$$\text{Misalkan : } C_5 = d^2 \frac{H_S \rho_S}{D^2} \frac{H_L}{\rho_m^2 A} \left(\frac{6}{\pi D^3} \right)$$

Jadi, model matematika pada gaya interaksi partikel pasir yang terdapat pada aliran pasir dalam minyak :

$$F_{S,S} = C_5 W_T^2 \quad (3.30)$$

3.1.4 Modifikasi Model Matematika pada Gaya Gravitasi ($F_{G,m}$)

Gaya gravitasi pada aliran minyak dalam pasir dalam suatu jaringan pipa adalah sebagai berikut :

$$F_{G,m} = \rho_m g \sin \theta \quad (3.31)$$

dengan : ρ_m = Massa jenis campuran (kg/m^3)

g = Gaya gravitasi (m/s^2)

θ = Sudut elevasi kemiringan

Gaya ini terjadi pada pipa vertikal. Karena pada kasus ini terjadi pada pipa horizontal dan sudut elevasi diabaikan ($\theta = 0$), sehingga model matematika pada gaya gravitasi pada aliran pasir dalam minyak adalah sebagai berikut :

$$F_{G,m} = 0 \quad (3.32)$$

3.1.5 Modifikasi Model Matematika pada Gaya Aliran Turbulen Antara Partikel Pasir dengan Minyak (F_{TM})

Gaya turbulen merupakan gaya yang terjadi akibat adanya aliran turbulen. Aliran turbulen adalah aliran yang pergerakan dari partikel-partikel fluida sangat tidak menentu karena mengalami pencampuran serta putaran partikel antar lapisan. Gaya aliran turbulen antara partikel pasir dengan minyak dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$F_{TM} = \frac{\rho_m}{\left(\frac{\pi D^3}{6}\right)} \frac{\pi}{4} (d_s)^2 (u')^2 \quad (3.33)$$

dengan : ρ_m = Massa jenis campuran (kg/m^3)

D = Diameter dalam pipa (m)

d_s = Ekuivalen partikel pasir

u' = Kecepatan aliran turbulen (m/s)

Pada persamaan 3.33 :

$$\text{Misalkan : } C_6 = \frac{\rho_m}{\left(\frac{\pi D^3}{6}\right)} \frac{\pi}{4} (d_s)^2 (u')^2 \quad (3.34)$$

Jadi, didapat model matematika pada gaya aliran turbulen antara partikel pasir dengan minyak:

$$F_{TM} = C_6 \quad (3.35)$$

3.2 Pengembangan Model Matematika Aliran Pasir dalam Minyak

Dari hasil modifikasi yang telah dilakukan pada 3.1, didapatkan model matematika setiap komponen aliran pasir dalam minyak sebagai berikut :

$$F_D = C_1 W_T^2 \quad (3.36)$$

$$F_W = C_2 W_T (C_3 + C_4 W_T^{0,8}) \quad (3.37)$$

$$F_{S,S} = C_5 W_T^2 \quad (3.38)$$

$$F_{G,m} = 0 \quad (3.39)$$

$$F_{TM} = C_6 \quad (3.40)$$

Persamaan 3.36, 3.37, 3.38, 3.39, 3.40 disubstitusi ke persamaan 3.1 sehingga diperoleh :

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = C_1 W_T^2 + C_2 W_T (C_3 + C_4 W_T^{0,8}) + C_5 W_T^2 + 0 + C_6 \quad (3.41)$$

Persamaan 3.41 dimanipulasi secara aljabar menjadi :

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = C_1 W_T^2 + C_2 W_T (C_3 + C_4 W_T^{0,8}) + C_5 W_T^2 + C_6$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = (C_1 + C_5) W_T^2 + C_2 W_T (C_3 + C_4 W_T^{0,8}) + C_6$$

$$\Delta p = \Delta x [(C_1 + C_5) W_T^2 + C_2 W_T (C_3 + C_4 W_T^{0,8}) + C_6]$$

$$\Delta p = \Delta x \left[(C_1 + C_5) W_T + C_2 \left(\frac{C_3}{W_T} + \frac{C_4}{W_T^{0,2}} \right) + \frac{C_6}{W_T} \right] W_T \quad (3.42)$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut secara simultan, dilakukan linearisasi persamaan 3.42 menggunakan *Linear Theory Method* sehingga Δp dapat diaproksimasi sebagai berikut :

$$\Delta p^{(n+1)} = \Delta x \left[(C_1 + C_5) W_T^{(n)} + C_2 \left(\frac{C_3}{W_T^{(n)}} + \frac{C_4}{(W_T^{(n)})^{0.2}} \right) + \frac{C_6}{W_T^{(n)}} \right] W_T^{(n+1)} \quad (3.43)$$

dengan n merupakan iterasi. $n = 0, \dots, N$

Dengan menuliskan :

$$\eta = \frac{1}{\Delta x \left[(C_1 + C_5) W_T + C_2 \left(\frac{C_3}{W_T} + \frac{C_4}{W_T^{0.2}} \right) + \frac{C_6}{W_T} \right]} \quad (3.44)$$

Persamaan 3.43 secara singkat dapat dituliskan sebagai :

$$\Delta p^{(n+1)} = \frac{1}{\eta^{(n)}} W_T^{(n+1)} \quad (3.45)$$

3.3 Analisis

Pada model matematika aliran pasir dalam minyak (persamaan 3.1) terdapat beberapa komponen gaya yang terlibat. Beberapa komponen gaya tersebut terdapat dalam suatu segmen pipa. Gaya-gaya tersebut meliputi gaya drag antara partikel pasir dengan minyak (F_D), gaya gesek dinding pipa dengan aliran fluida (F_w), gaya interaksi partikel pasir ($F_{S,S}$), gaya gravitasi ($F_{G,m}$), gaya aliran turbulen antara partikel pasir dengan minyak (F_{TM}).

Setiap komponen gaya tersebut bergantung pada laju aliran massa sehingga komponen gaya tersebut dapat dimodifikasi berdasarkan laju aliran massa. Komponen-komponen selain laju alir massa dimisalkan koefisien komponen gaya. Setelah didapat persamaan hasil modifikasi berdasarkan laju alir massa pada setiap gaya yang terlibat, persamaan hasil modifikasi pada setiap gaya yang terlibat tersebut disusun sesuai dengan model matematika aliran pasir dalam minyak. Dengan menggunakan *Linear Theory Method* didapatkan pengembangan model matematika aliran pasir dalam minyak berdasarkan laju alir massa. Pada model tersebut terdapat iterasi yang berguna untuk memprediksi perubahan tekanan pada setiap segmen pipa.

Laju alir massa memiliki hubungan terhadap perubahan tekanan dan laju alir fluida. Hubungan laju alir massa terhadap tekanan dapat terlihat pada pengembangan model matematika aliran pasir dalam minyak. Laju alir massa berbanding lurus dengan perubahan tekanan. Jika laju alir massa besar maka perubahan tekanan menjadi besar begitupun sebaliknya jika laju alir massa kecil maka perubahan tekanan pun akan kecil.

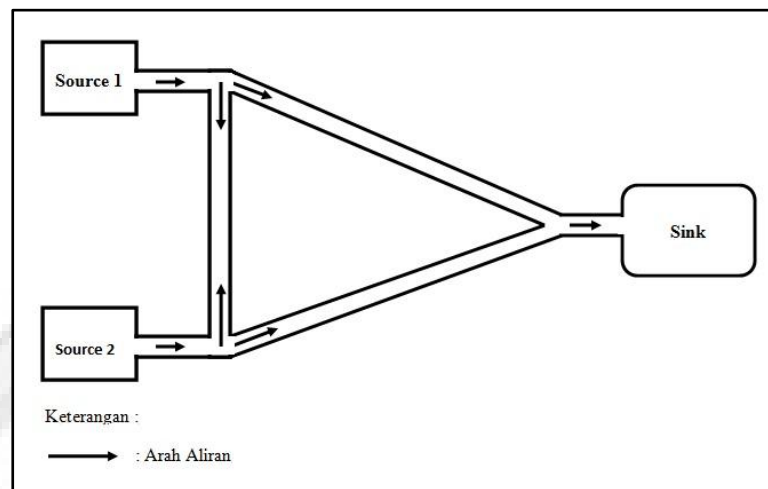
Hubungan laju alir massa dengan laju alir fluida dapat terlihat pada definisi laju alir fluida. Laju alir fluida merupakan perkalian antara massa jenis campuran dengan laju alir massa. Dari definsi tersebut terdapat suatu hubungan yaitu laju alir massa berbanding lurus dengan laju alir fluida. Jika laju alir massa besar, maka laju alir fluida tinggi begitupun sebaliknya jika laju alir kecil maka laju alir fluida pun akan rendah.

Hubungan laju alir fluida terkait dengan penerapannya dalam jaringan pipa. Jika laju aliran terlalu tinggi maka tekanan yang dihasilkan akan sangat tinggi sehingga akan merusak pipa (pecah). Jadi laju aliran harus cukup rendah untuk mengantisipasi kerusakan pipa. Di sisi lain, jika laju alir terlalu rendah akan terjadi pengendapan pasir yang berakibat penyumbatan pada pipa. Menurut API RP 14E, laju alir minimum dengan batas bawah 0,91 m/s.

Pengoperasian jaringan pipa yang optimum akan dicapai oleh laju aliran yang optimum pula. Karena kedua alasan yang disebutkan di atas, maka laju aliran optimum dapat terjadi jika laju alirnya minimal sehingga mencegah pecahnya pipa tetapi tidak kurang dari 0,91 m/s mencegah terjadinya penyumbatan pada pipa.

3.4 Penerapan Model Matematika Hasil Pengembangan

Minyak yang mengandung pasir mengalir dalam suatu jaringan pipa. Jaringan pipa yang bercabang-cabang menimbulkan masalah yang relatif kompleks. Jaringan pipa yang bercabang-cabang tersebut dapat mengandung *looping*. Jaringan pipa yang bercabang-cabang dan mengandung *looping* disebut dengan sistem jaringan pipa kompleks.



Gambar 3.1 Jaringan Pipa Kompleks

Gambar 3.1 menunjukkan bagian dari sebuah jaringan pipa kompleks. Pada Gambar 3.1 terdapat beberapa komponen pipa antara lain node, *leg*, *source*, dan *sink*. Node adalah penghubung antara pipa satu dengan pipa yang lainnya. *Leg* adalah segmen pipa tempat mengalirnya suatu aliran minyak. *Source* adalah suatu tempat yang menghasilkan minyak yang akan dialirkan ke tempat penampungan. *Sink* adalah tempat untuk menampung minyak.

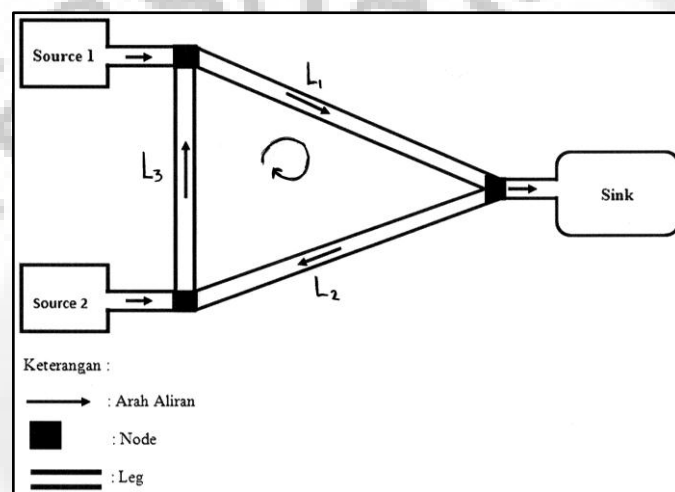
Karena adanya perbedaan tekanan di setiap titik persimpangan, aliran minyak akan ‘memutari’ *loop*. Arah putaran *loop* yang mungkin ada dua, yaitu searah jarum jam atau berlawanan arah jarum jam. Pada setiap kasus, terdapat tiga persamaan linier yang perlu diselesaikan secara simultan sehingga membentuk sistem persamaan linier. Solusi sistem persamaan linier kemudian didapat dengan menggunakan invers matriks sistem persamaan linier.

Pada setiap kasus jaringan pipa kompleks tersebut memiliki tiga node, dua *source*, satu *sink*, dan tiga *leg*. Pada bagian node tersebut terdapat laju alir massa yang masuk dan laju alir massa yang keluar. *Source* dinotasikan dengan S_1 dan S_2 .

Sink dinotasikan dengan D . Setiap segmen pipa dinamakan *leg*. *Leg* dinotasikan L_1, L_2, L_3 .

Kasus 1 (Loop searah jarum jam) :

Pada kasus 1, terdapat suatu jaringan pipa kompleks yang mengandung *looping* searah jarum jam, dapat dilihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Jaringan Pipa Kompleks yang Mengandung *Looping* Searah Jarum Jam

Pada setiap node dari Gambar 3.2, dengan menggunakan Hukum Kirchoff, diketahui bahwa $\sum W_{masuk} = \sum W_{keluar}$ sehingga diperoleh suatu sistem persamaan sebagai berikut :

$$S_1 + L_3 = L_1$$

$$S_2 + L_2 = L_3$$

$$L_1 = L_2 + D \tag{3.46}$$

Setiap *leg* memiliki laju alir massa fluida ($L_i = W_{Ti}$) sehingga sistem persamaan diatas dapat diubah menjadi :

$$S_1 + W_{T3} = W_{T1}$$

$$S_2 + W_{T2} = W_{T3}$$

$$W_{T1} = W_{T2} + D \quad (3.47)$$

Sistem persamaan diatas dapat diubah menjadi :

$$-W_{T1} + 0 + W_{T3} = -S_1$$

$$0 + W_{T2} - W_{T3} = -S_2$$

$$W_{T1} - W_{T2} + 0 = D \quad (3.48)$$

Persamaan 3.45 dapat pula dituliskan sebagai $W = \eta \Delta p$ sehingga sistem persamaan linear 3.48 menjadi :

$$-\Delta p_1 \eta_1 + 0 + \Delta p_3 \eta_3 = -S_1$$

$$0 + \Delta p_2 \eta_2 - \Delta p_3 \eta_3 = -S_2$$

$$\Delta p_1 \eta_1 - \Delta p_2 \eta_2 + 0 = D \quad (3.49)$$

Sistem persamaan di atas dapat ditulis ke dalam bentuk matriks menjadi :

$$\begin{bmatrix} -\eta_1 & 0 & \eta_3 \\ 0 & \eta_2 & -\eta_3 \\ \eta_1 & -\eta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1 \\ -S_2 \\ D \end{bmatrix}$$

dengan : $A = \begin{bmatrix} -\eta_1 & 0 & \eta_3 \\ 0 & \eta_2 & -\eta_3 \\ \eta_1 & -\eta_2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Delta p = \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \end{bmatrix}$$

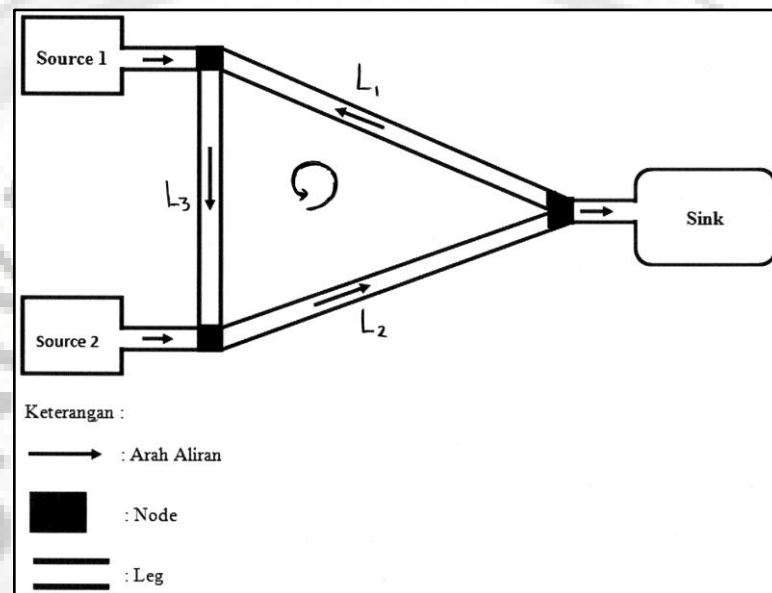
$$R = \begin{bmatrix} -S_1 \\ -S_2 \\ D \end{bmatrix}$$

sehingga dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\Delta p = [A]^{-1} R$$

Kasus 2 (Loop berlawanan arah jarum jam) :

Pada kasus 2, terdapat suatu jaringan pipa kompleks yang mengandung *looping* berlawanan dengan arah jarum jam, dapat dilihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Jaringan Pipa Kompleks yang Mengandung *Looping* Berlawanan Arah Jarum Jam

Pada setiap node dari Gambar 3.3, dengan menggunakan Hukum Kirchoff, diketahui bahwa $\sum W_{masuk} = \sum W_{keluar}$ sehingga diperoleh suatu sistem persamaan sebagai berikut :

$$S_1 + L_1 = L_3$$

$$S_2 + L_3 = L_2$$

$$L_2 = L_1 + D \quad (3.50)$$

Setiap *leg* memiliki laju alir massa fluida ($L_i = W_{Ti}$) sehingga sistem persamaan diatas dapat diubah menjadi :

$$S_1 + W_{T1} = W_{T3}$$

$$S_2 + W_{T3} = W_{T2}$$

$$W_{T2} = W_{T1} + D \quad (3.51)$$

Sistem persamaan di atas dapat diubah menjadi :

$$\begin{aligned} +W_{T1} &+ 0 &- W_{T3} &= -S_1 \\ + 0 &- W_{T2} &+ W_{T3} &= -S_2 \\ - W_{T1} &+ W_{T2} &+ 0 &= D \end{aligned} \quad (3.52)$$

Persamaan 3.45 dapat pula dituliskan sebagai $W = \eta \Delta p$ sehingga sistem persamaan linear 3.52 menjadi :

$$\begin{aligned} + \Delta p_1 \eta_1 &+ 0 &- \Delta p_3 \eta_3 &= -S_1 \\ + 0 &- \Delta p_2 \eta_2 &+ \Delta p_3 \eta_3 &= -S_2 \\ - \Delta p_1 \eta_1 &+ \Delta p_2 \eta_2 &+ 0 &= D \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sistem persamaan diatas dapat ditulis ke dalam bentuk matriks menjadi :

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & -\eta_3 \\ 0 & -\eta_2 & \eta_3 \\ -\eta_1 & \eta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1 \\ -S_2 \\ D \end{bmatrix}$$

dengan : $A = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & -\eta_3 \\ 0 & -\eta_2 & \eta_3 \\ -\eta_1 & \eta_2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Delta p = \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -S_1 \\ -S_2 \\ D \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\Delta p = [A]^{-1} R$$