BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendahuluan

Skripsi ini membahas tentang uji kebebasan dua data multivariat berdasarkan pada graf. Dalam bab ini akan dipaparkan secara ringkas mengenai distribusi seragam diskrit, graf, pohon, dan uji kebebasan dua data multivariat berdasarkan pada graf.

2.2 Distribusi Seragam Diskrit

Peubah acak X dikatakan berdistribusi seragam diskrit apabila fungsi peluangnya adalah

$$f(x;k) = \frac{1}{k}, \text{untuk } x = 1, 2, 3, \dots, k. \tag{2.1}$$

Ekspektasi dan varians dari peubah acak *X* di atas masing-masing adalah

$$E(X) = \frac{k+1}{2}, \tag{2.2}$$

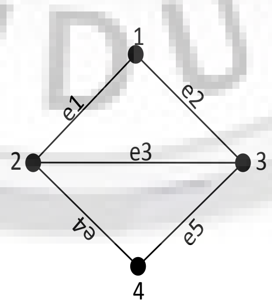
$$V(X) = \frac{k^2-1}{12}. \tag{2.3}$$

2.3 Graf

Graf *G* didefinisikan sebagai pasangan himpunan (*V*, *E*), ditulis dengan notasi *G* = (*V*, *E*), dalam hal ini *V* adalah himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan *E* adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul (Munir, 2010). Graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada, minimal satu. Simpul pada graf dapat dinomori dengan huruf seperti $a, b, c, \cdots, z$ dengan bilangan asli $1, 2, 3, \cdots$, atau gabungan keduanya. Misalkan *u* dan *v* adalah simpul pada graf. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul *u* dengan simpul *v* dinyatakan dengan pasangan (*u*,*v*) atau dinyatakan dengan lambang $e_1, e_2, \cdots$ dengan kata lain, jika *e* adalah sisi yang menghubungkan simpul *u* dengan simpul *v*, maka *e* dapat ditulis sebagai *e* = (*u*,*v*). Secara geometri graf digambarkan sebagai sekumpulan noktah (simpul) di dalam bidang dua dimensi yang dihubungkan dengan sekumpulan garis (sisi).

2.3.1 Graf Sederhana (*Simple Graph*)

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. Jaringan komputer merupakan contoh graf sederhana. Simpul menyatakan komputer, sedangkan sisi menyatakan saluran telepon untuk berkomunikasi. Pada graf sederhana, sisi adalah pasangan tak terurut (*unordered pairs*). Jadi, menuliskan sisi (*u*,*v*) sama saja dengan (*v*,*u*). kita dapat juga mendefinisikan graf sederhana *G* = (*V*, *E*) terdiri dari himpunan tidak kosong simpul-simpul dan *E* adalah himpunan pasangan tak berurut yang berbeda yang disebut sisi. Gambar 2.1 menyajikan contoh graf sederhana.

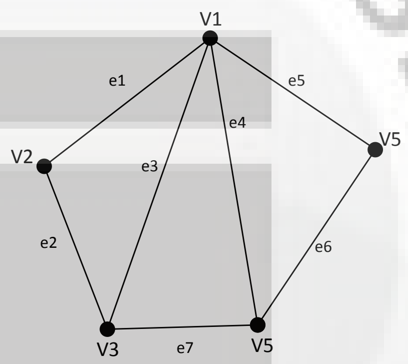


Gambar 2.1 Contoh Graf Sederhana

Pada Gambar 2.1 bilangan asli $1, 2, 3,$ dan 4 merupakan simpul dan e_1 merupakan sisi yang menghubungkan simpul 1 dan simpul 2, e_2 merupakan sisi yang menghubungkan simpul 1 dan simpul 3, e_3 merupakan sisi yang menghubungkan simpul 2 dan simpul 3, e_4 merupakan sisi yang menghubungkan simpul 2 dan simpul 4, dan e_5 merupakan sisi yang menghubungkan simpul 3 dan simpul 4.

2.3.2 Graf Tak-Berarah

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u,v) = (v,u)$ adalah sisi yang sama. Gambar 2.2 menyajikan contoh graf tak-berarah.



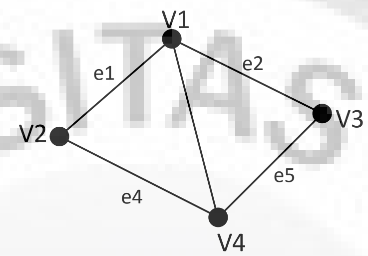
Gambar 2.2 Contoh Graf Tak-Berarah

Pada Gambar 2.2 simpul $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$ dihubungkan oleh sisi e_1, simpul $(v_2, v_3) = (v_2, v_3)$ dihubungkan oleh sisi e_2, simpul $(v_1, v_3) = (v_3, v_1)$ dihubungkan oleh sisi e_3, simpul $(v_1, v_4) = (v_4, v_1)$ dihubungkan oleh sisi e_4, simpul $(v_1, v_5) = (v_5, v_1)$ dihubungkan oleh sisi e_5, simpul $(v_4, v_5) = (v_5, v_4)$ dihubungkan oleh sisi e_6, dan simpul $(v_3, v_4) = (v_4, v_3)$ dihubungkan oleh sisi e_7.

2.3.3 Terminologi Dasar Graf

a. Bertetangga (*Adjacent*).

Dua buah simpul pada graf tak-berarah *G* dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, *u* bertetangga dengan *v* jika (*u*,*v*) adalah sebuah sisi pada graf *G*. Gambar 2.3 menyajikan contoh graf bertetangga.

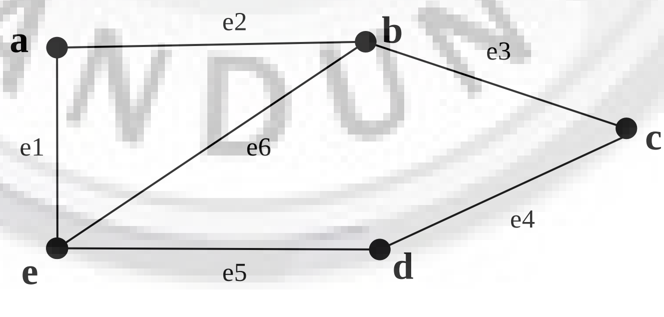


Gambar 2.3 Contoh Graf Betetangga

Pada Gambar 2.3 simpul V_1 betetangga dengan simpul $V_2, V_3, dan\ V_4$, simpul V_2 bertetangga dengan V_1 dan V_4, tetapi tidak bertetangga dengan V_3.

b. Bersisian (*Incident*)

Untuk sembarang sisi *e* = (*u*,*v*), sisi *e* dikatakan bersisian dengan simpul *u* dan simpul *v*. Gambar 2.4 menyajikan contoh graf bersisian.



Gambar 2.4 Contoh Graf Bersisian

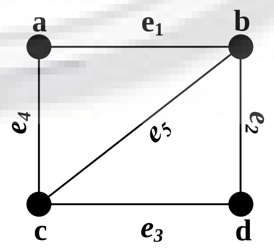
Pada Gambar 2.4 sisi e_1 bersisian dengan simpul a dan e, sisi e_2 bersisian dengan simpul a dan b, sisi e_3 bersisian dengan simpul b dan c, sisi

e_4 bersisian dengan simpul c dan d, sisi e_5 bersisian dengan simpul d dan e, dan sisi e_6 bersisian dengan simpul b dan e.

c. Lintasan (*Path*)

Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_{2=}(v_1, v_2), \cdots$, $e_n = (v_{n-1} v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G. Jika graf yang ditinjau adalah graf sederhana, maka kita cukup menuliskan lintasan sebagai barisan simpul-simpul saja: $v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}, v_n$, karena antara dua buah simpul berturutan di dalam lintasan tersebut hanya ada satu sisi.

Sebuah lintasan dikatakan lintasan sederhana (*simple path*) jika semua simpulnya berbeda (setiap sisi yang dilalui hanya satu kali). Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut lintasan tertutup (*closed path*), sedangkan lintasan yang tidak berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut lintasan terbuka (*open path*). Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Gambar 2.5 menyajikan contoh graf yang mengandung lintasan (*path*).

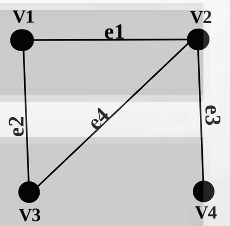


Gambar 2.5 Contoh Graf dengan Lintasan (*Path*)

Pada Gambar 2.5 contoh lintasan (*path*) dari simpul a ke simpul d adalah $(a, e_1, b, e_5, c, e_3, d)$ dan contoh lintasan (*path*) dari simpul b ke simpul c adalah (b, e_2, d, e_3, c).

d. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*).

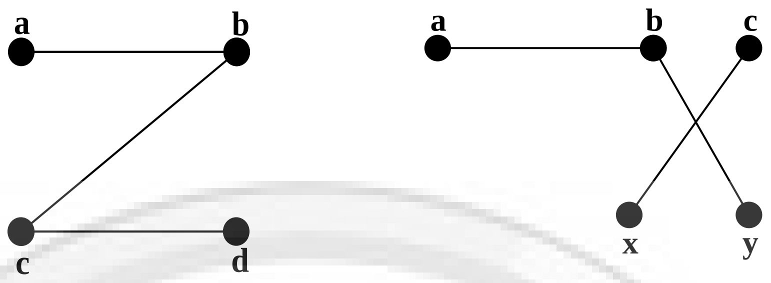
Siklus atau sirkuit adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Sebuah sirkuit dikatakan sirkuit sederhana (*simple circuit*) jika sirkuit tersebut tidak memuat/melewati sisi yang sama dua kali (setiap sisi yang dilalui hanya satu kali). Gambar 2.6 menyajikan contoh siklus (*cycle*) atau sirkuit (*circuit*).



Gambar 2.6 Sirkuit V_1-V_2-V_3-V_1

e. Terhubung (*Connected*).

Keterhubungan dua buah simpul adalah penting di dalam graf. Dua buah simpul *u* dan simpul *v* dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari *u* ke *v*. Jika dua buah simpul terhubung maka pasti simpul yang pertama dapat dicapai dari simpul yang kedua. Dua simpul terminal pada jaringan komputer hanya dapat berkomunikasi bila keduanya terhubung. Graf tak-berarah *G* disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul *u* dan *v* di dalam himpunan *V* terdapat lintasan dari *u* ke *v* (yang juga berarti harus ada lintasan dari dari *u* ke *v*). Jika tidak, maka *G* disebut graf tak-terhubung (*disconnected graph*). Gambar 2.7 menyajikan contoh graf terhubung dan contoh graf tidak terhubung.



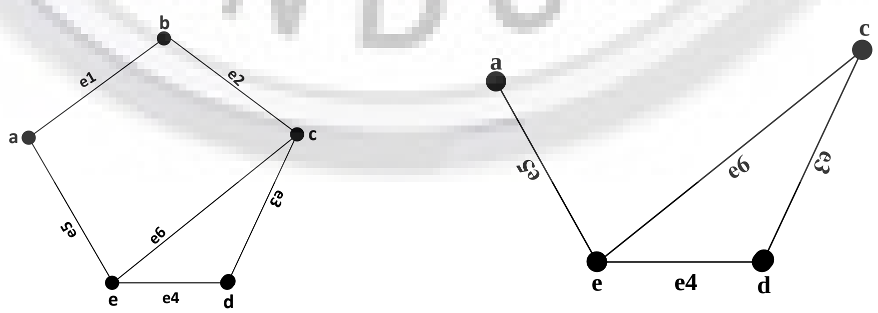
(a) (b)

Gambar 2.7 (a) Contoh Graf Terhubung dan (b) Contoh Graf Tidak Terhubung

Pada Gambar 2.7 (a) merupakan contoh graf terhubung, terdapat lintasan dari simpul a ke simpul d dan antara simpul terhubung oleh sebuah sisi, Gambar 2.7 (b) merupakan contoh graf tidak terhubung karena setiap simpul pada graf tidak dihubungkan oleh sebuah sisi.

f. Upagraf (*Subgraph*).

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah upagraf (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. Gambar 2.8 menyajikan contoh Upagraf (*subgraph*) dari sebuah graf.

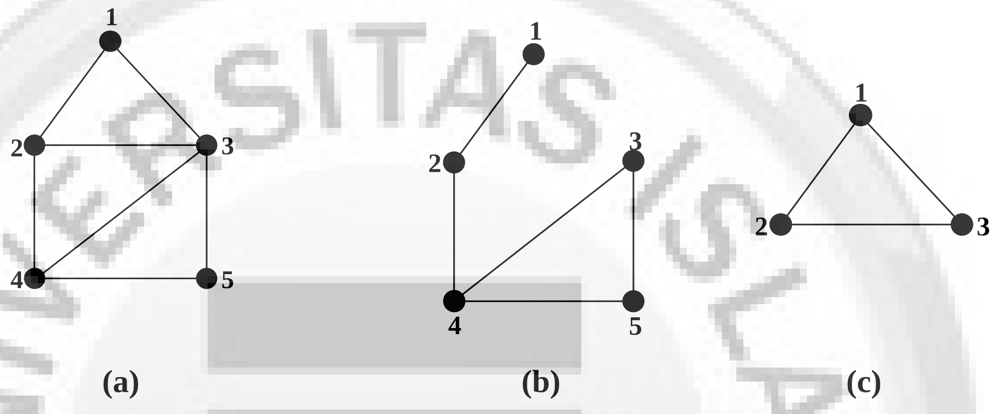


(a) (b)

Gambar 2.8 (a) Contoh Graf dan (b) Contoh Subgraf dari (a)

g. Upagraf Merentang (*Spanning Subgraph*).

Upagraf G_1 = (V_1, E_1) dari $G = (V,E)$ dikatakan upagraf merentang jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 mengandung semua simpul dari G). Gambar 2.9 menyajikan contoh graf, upagraf merentang dari graf dan bukan upagraf merentang dari graf.



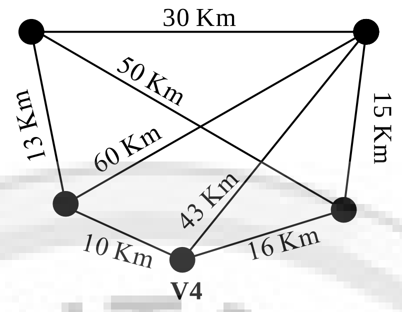
Gambar 2.9 (a) Graf G, (b) Upagraf Merentang dari G,
(c) Bukan Upagraf Merentang dari G

Pada Gambar 2.9 (a) merupakan contoh graf dengan lima simpul yaitu simpul $1, 2, 3, 4,$ dan 5. Gambar 2.9 (b) merupakan contoh upagraf merentang dari graf G karena mengandung semua simpul dari graf G, Gambar 2.9 (c) bukan upagraf merentang dari G karena tidak mengandung semua simpul di graf G.

h. Graf Berbobot (*Weighted Graph*).

Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot). Bobot pada tiap sisi dapat berbeda-beda bergantung pada masalah yang dimodelkan dengan graf. Bobot dapat menyatakan jarak antara dua buah kota, biaya perjalanan atara dua buah kota, waktu tempuh pesan (*message*) dari sebuah simpul komunikasi ke simpul komunikasi lain (dalam jaringan komputer), ongkos produksi, dan sebagainya.

Gambar 2.10 menyajikan contoh graf berbobot, dimana bobot pada setiap sisi menyatakan jarak (dalam km).

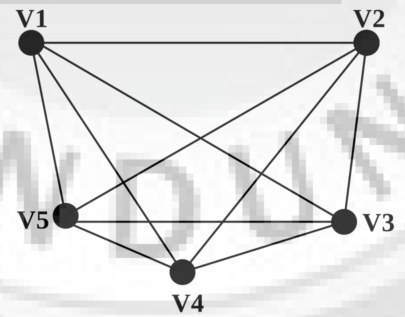


Gambar 2.10 Contoh Graf Berbobot

Pada Gambar 2.10 merupakan contoh graf berbobot dimana bobot pada setiap sisi yang menghubungkan simpul menyatakan jarak (dalam km).

i. Graf Lengkap (*Complete Graph*).

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Setiap simpul pada K_n mempunyai sisi sebanyak n-1. Gambar 2.11 menyajikan contoh graf lengkap.



Gambar 2.11 Contoh Graf Lengkap

2.4 Pohon

Pohon adalah graf tak-berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf tak-berarah sederhana dan jumlah simpulnya n. Dengan demikian, semua pernyataan di bawah ini adalah *ekivalen*:

a. *G* adalah pohon.

b. Setiap pasang simpul di dalam *G* terhubung dengan lintasan tunggal.

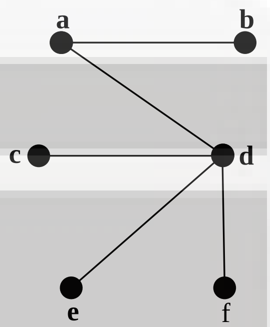
c. *G* terhubung dan memiliki $m = n$-1 buah sisi.

d. *G* tidak mengandung sirkuit.

e. *G* tidak mengandung sirkuit dan penambahan satu sisi pada graf akan membuat hanya satu sirkuit.

f. *G* terhubung dan semua sisinya adalah jembatan (jembatan adalah sisi yang bila dihapus menyebabkan graf terpecah menjadi dua komponen).

Gambar 2.12 menyajikan contoh pohon.

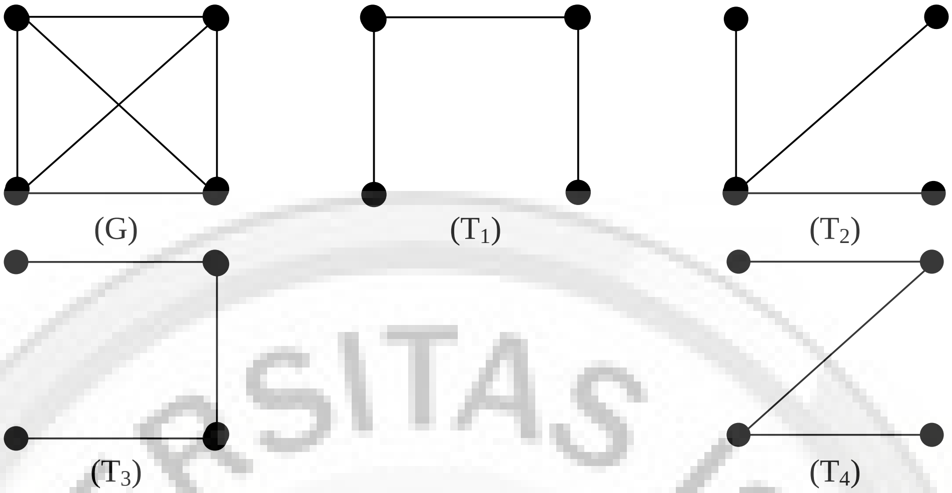


Gambar 2.12 Contoh Pohon

2.4.1 Pohon Merentang

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf tak-berarah terhubung yang bukan pohon, yang berarti di *G* terdapat beberapa sirkuit. *G* dapat diubah menjadi pohon $T = (V_1, E_1)$ dengan cara memutuskan sirkuit-sirkuit yang ada. Caranya, mula-mula dipilih sebuah sirkuit, lalu hapus satu buah sisi dari sirkuit ini. *G* akan tetap terhubung dan jumlah sirkuitnya berkurang satu. Bila proses ini dilakukan berulang-ulang sampai semua sirkuit di *G* hilang, maka *G* menjadi sebuah pohon *T*, yang dinamakan pohon merentang (*spanning tree*). Disebut pohon merentang karena semua simpul pada pohon *T* sama dengan semua simpul pada graf *G*, dan sisi-sisi pada pohon $T \subseteq$ sisi-sisi pada graf *G*. Dengan kata lain, $V_1 = V$ dan

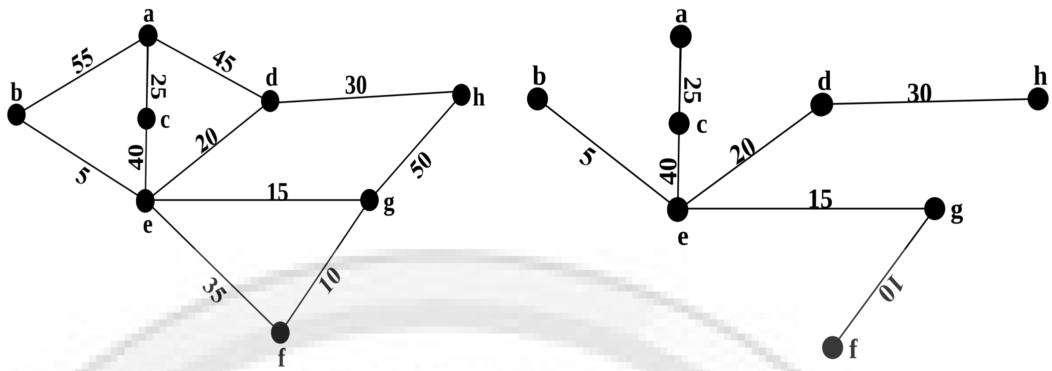
$E_1 \subseteq E$. Gambar 2.13 menyajikan contoh graf lengkap dan empat buah pohon merentangnya.



Gambar 2.13 Contoh Graf Lengkap G dan Empat Pohon Merentangnya T_1, T_2, T_3, dan T_4

2.4.2 Pohon Merentang Minimum

Jika *G* adalah graf berbobot, maka bobot pohon merentang *T* dari *G* didefinisikan sebagai jumlah bobot semua sisi di *T*. Pohon merentang yang berbeda mempunyai bobot yang berbeda pula. Diantara semua pohon merentang di *G*, pohon merentang yang berbobot minimum dinamakan pohon merentang minimum (*minimum spanning tree*). Pohon merentang minimum mempunyai terapan yang luas dalam praktik. Misalkan pemerintah akan membangun jalur rel kereta api yang menghubungkan sejumlah kota. Membangun jalur rel kereta api biayanya mahal, karena itu pembangunan jalur ini tidak perlu menghubungkan langsung dua buah kota, tetapi cukup membangun jalur kereta seperti pohon merentang. Karena di dalam sebuah graf mungkin saja terdapat lebih dari satu pohon merentang, harus dicari pohon merentang yang mempunyai jumlah jarak terpendek, dengan kata lain harus dicari pohon merentang minimum. Gambar 2.14 menyajikan contoh pohon merentang minimum (*minimum spanning tree*).



(a) (b)

Gambar 2.14 (a) Graf yang menyatakan jaringan jalur rel kereta api. Bobot pada setiap sisi menyatakan panjang rel kereta api (dalam 100 Km) (b) Pohon merentang yang mempunyai jumlah jarak minimum

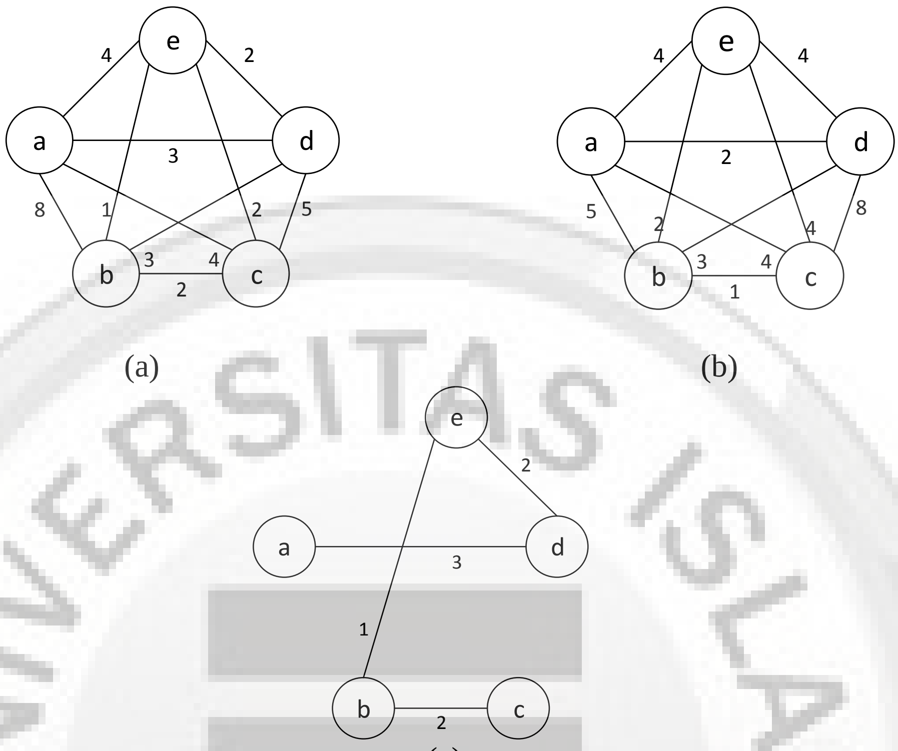
2.5 Uji Kebebasan Multivariat Berdasarkan Graf

Misalkan $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \{(\boldsymbol{X}_k;\boldsymbol{Y}_k): k = 1, \ldots, n\}$ adalah suatu sampel acak berukuran n dari vektor-vektor acak **X** dalam $\Re^p$ dan **Y** dalam $\Re^q$, dimana p dan q adalah bilangan integer positif. Vektor acak $\boldsymbol{X}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kp})$, dan vektor acak $\boldsymbol{Y}_k = (y_{k1}, y_{k2}, \cdots, y_{kq})$. Misalkan f_x, f_y, dan $f_{x,y}$ masing-masing menyatakan distribusi untuk $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, dan gabungan dari $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{Y}$. $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{Y}$ dikatakan saling bebas jika dan hanya jika $f_{x,y} = f_x \cdot f_y$ (Szekely dan Rizzo, 2009). Dengan demikian untuk menguji hipotesis apakah $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{Y}$ saling bebas dapat dirumuskan hipotesis sebagai berikut

$$H_0: f_{X,Y} = f_x \cdot f_y \text{ lawan } H_1: f_{X,Y} \neq f_x \cdot f_y. \tag{2.4}$$

Untuk menurunkan statistik uji dari hipotesis di atas berdasarkan graf, pertama-tama perhatikan contoh sederhana berikut untuk $n = 5$. Gambar 2.15 menyajikan gambar graf lengkap diboboti jarak G_X dan G_Y serta pohon merentang minimum (*Minimum Spanning Tree* - MST) untuk graf G_X. Graf G_X (Gambar 2.15

(a)) dan G_Y (Gambar 2.15 (b)) masing-masing merepresentasikan kumpulan titik-titik sampel untuk vektor ***X*** dan ***Y*.** Gambar 2.15 (c) merupakan MST untuk graf G_X.



Gambar 2.15 (a) Graf G_X, (b) Graf G_Y, (c) MST dari Graf G_X

Dalam bagian ini jarak yang akan digunakan adalah jarak Euclidean. Jarak Euclidean antara dua pengamatan dalam X dan Y masing-masing didefinisikan sebagai berikut:

$$a_{kl} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (X_{ki} - X_{li})^2}\ ;\ k, l = 1,2,\cdots,n;\ k \neq l \tag{2.5}$$

dan

$$b_{kl} = \sqrt{\sum_{j=1}^{q} (Y_{kj} - Y_{lj})^2}\ ;\ k, l = 1,2,\cdots,n;\ k \neq l \tag{2.6}$$

Untuk data yang distandarisasi, maka jarak Euclidean-nya adalah:

$$a_{kl}^{*} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (Z_{ki}^{X} - Z_{li}^{X})^2}\ ;\ k, l = 1,2,\cdots,n;\ k \neq l \tag{2.7}$$

$$b_{kl}^{*} = \sqrt{\sum_{j=1}^{q} (Z_{kj}^{Y} - Z_{lj}^{Y})^2} \; ; \; k, l = 1,2, \cdots, n; \; k \neq l \tag{2.8}$$

dimana:

$$Z_{rt}^{X} = \frac{X_{rt} - \bar{X}_{.t}}{S_{.t}^{X}} ; r = 1, \cdots, n; t = 1, \cdots, p \tag{2.9}$$

$$\bar{X}_{.t} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} X_{rt} \; ; \; t = 1, \cdots, p \tag{2.10}$$

$$S_{.t}^{X} = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^{n} (X_{rt} - \bar{X}_{.t})^2}{n-1}} ; \; t = 1, \cdots, p \tag{2.11}$$

$$Z_{rt}^{Y} = \frac{Y_{rt} - \bar{Y}_{.t}}{S_{.t}^{Y}} ; r = 1, \cdots, n; t = 1, \cdots, q \tag{2.12}$$

$$\bar{Y}_{.t} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} Y_{rt} \; ; \; t = 1, \cdots, q \tag{2.13}$$

$$S_{.t}^{Y} = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^{n} (Y_{rt} - \bar{Y}_{.t})^2}{n-1}} ; \; t = 1, \cdots, q \tag{2.14}$$

Jika $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{Y}$ saling bebas, tidak diharapkan bahwa titik sampel yang dihubungkan oleh sisi berbobot rendah di graf G_X juga memiliki sisi berbobot rendah di graf G_Y. Di bawah hipotesis nol saling bebas, jika kita memilih sisi dari G_X, kemudian melihat ranking sisi tersebut di G_Y, maka ranking ini akan berdistribusi secara acak. Di bawah hipotesis alternatif diharapkan bahwa jika diberikan MST dari G_X, kemudian kita memilih sisi dari G_X, maka ranking dari sisi tersebut di G_Y akan kecil. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.15, berdasarkan MST dari G_X, perjalanan akan dilakukan di graf G_Y dimulai dari simpul a ke simpul d. Jarak dari simpul a ke simpul d merupakan jarak terdekat pertama dibandingkan dengan jarak dari simpul a ke simpul yang lainnya. Sehingga ranking dari perjalanan simpul a ke simpul d di graf G_Y adalah 1. Perjalanan dilanjutkan dari simpul d ke simpul e di graf G_Y. Jarak dari simpul d ke simpul e merupakan jarak yang terdekat kedua dibandingkan dengan jarak dari simpul d ke simpul b, dan c. Sehingga ranking dari perjalanan simpul d ke simpul e di graf G_Y adalah 2. Perjalanan dilanjutkan dari simpul e ke simpul b di graf G_Y. Jarak dari simpul e ke simpul b merupakan jarak terdekat pertama dibandingkan dengan jarak dari simpul e ke simpul c. Sehingga ranking dari perjalanan simpul e ke simpul b di graf G_Y adalah 1. Berdasarkan ranking yang kecil dari sisi-sisi di graf G_Y berdasarkan MST pada graf G_X, tampaknya ada kemungkinan keterkaitan antara $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{Y}$.

2.5.1 Pembentukan Statistik Uji

Dalam bagian ini ilustrasi yang ada pada paragraf sebelumnya untuk n = 5 akan digeneralisasi kemudian akan dibentuk statistik uji untuk hipotesis yang ada pada Persamaan (2.4). Berdasarkan MST dari G_X, perjalanan akan dilakukan di graf G_Y dimulai dari simpul pertama pada MST dari G_X. Kemudian maju ke simpul yang baru. Dengan demikian perjalanan akan dilakukan dalam n-1 tahap. Perjalanan akan direpresentasikan oleh $\{v_1^j, v_2^j; j = 1, \dots, n-1\}$ dimana v_1^j dan v_2^j menunjukkan simpul pertama dan kedua yang terpilih pada langkah ke j, dimana $v_1^j \in \{v_1^1, v_2^1, v_2^2, \dots, v_2^{j-1}\}$ dan $v_2^j \notin \{v_1^1, v_2^1, v_2^2, \dots, v_2^{j-1}\}$. Secara umum tahapan yang dilakukan disajikan pada Gambar 2.16.

Tahap 1	Ranking jarak dari sisi e_1 = (v_1^1 dan v_2^1) di dalam graf G_Y diantara $n-1$ jarak dari sisi-sisi yang menghubungkan simpul v_1^1 dengan $n-1$ simpul lainnya. Sebut saja ranking tersebut adalah R_1 ($R_1 \in \{1, \ldots, n-1\}$).
Tahap 2	Ranking jarak dari sisi e_2 = (v_1^2 dan v_2^2) di dalam graf G_Y diantara sisi-sisi yang menghubungkan v_1^2 dengan $\{v_2^2, \ldots, v_2^{n-1}\}$. Sebut saja ranking tersebut adalah R_2 ($R_2 \in \{1, \ldots, n-2\}$).
$\vdots$	$\vdots$
Tahap j	Ranking jarak dari sisi e_j = (v_1^j dan v_2^j) di dalam graf G_Y diantara sisi-sisi yang menghubungkan v_1^j dengan $\{v_2^j, \ldots, v_2^{n-1}\}$. Sebut saja ranking tersebut adalah $R_j (R_j \in \{1, \ldots, n-j\})$.
$\vdots$	$\vdots$
Tahap $n-2$	ranking jarak dari sisi e_{n-2} = (v_1^{n-2} dan v_2^{n-2}) di dalam graf G_Y diantara sisi-sisi yang menghubungkan v_1^{n-2} dengan $\{v_2^{n-2}, \ldots, v_2^{n-1}\}$. Sebut saja ranking tersebut adalah $R_{n-2}(R_{n-2} \in \{1,2\})$.

Gambar 2.16 Tahapan dalam Menentukan Ranking pada Graf

Di bawah hipotesis nol $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{Y}$ saling bebas, R_i berdistribusi seragam diskrit pada $\{1, 2, \cdots, n-i\}$, $i = 1, \cdots, n-2$, dimana $R_1, \cdots, R_{n-2}$ saling bebas. Berdasarkan *n*-2 tahap di atas, Heller dkk. (2012) mengusulkan suatu statistik uji untuk hipotesis pada Persamaan (2.4). Statistik ujinya adalah:

$$F_n = -2 \sum_{j=1}^{n-2} F_{nj} = -2 \sum_{j=1}^{n-2} \ln\left(\frac{R_j}{n-j}\right) \tag{2.15}$$

2.5.2 Distribusi dari Statistik Uji

Di bawah hipotesis nol, ekspektasi dan varians dari $F_{nj} = -2 \ln\left(\frac{R_j}{n-j}\right)$ masing-masing adalah:

$$E_0(F_{nj}) = 2 \ln\left[\frac{n-j}{((n-j)!)^{1/(n-j)}}\right], \tag{2.16}$$

$$Var_0(F_{nj}) = \frac{4}{n-j}\sum_{k=1}^{n-j}\left[\ln\left(\frac{k}{((n-j)!)^{1/(n-j)}}\right)\right]^2. \quad (2.17)$$

Statistik uji F_n adalah jumlah dari $n-2$ peubah acak yang saling bebas, dimana ekspektasi dan variansnya di bawah hipotesis nol masing-masing adalah

$$E_0(F_n) = \sum_{j=1}^{n-2} E_0(F_{nj}), \quad (2.18)$$

$$Var_0(F_n) = \sum_{j=1}^{n-2} Var_0(F_{nj}). \quad (2.19)$$

Ketika $n \to \infty$, di bawah hipotesis nol, peubah acak $\frac{F_n - E_0(F_n)}{\sqrt{Var_0(F_n)}}$ akan berdistribusi normal baku.