# BAB II

# TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Pendahuluan

Sebelum melakukan pembahasan mengenai permasalahan dari skripsi ini, pada bab ini akan diuraikan beberapa teori penunjang yang dapat membantu dalam penulisan skripsi. Teori penunjang tersebut adalah: distribusi diskrit baru (distribusi Gómez-Déniz et al.), asuransi kendaraan bermotor, distribusi-distribusi diskrit diantaranya geometrik, Poisson, binomial negatif, , dan uji kecocokan distribusi.

## 2.2 Distribusi Diskrit Baru

Dalam bagian ini akan dijelaskan distribusi diskrit baru atau selanjutnya disebut distribusi Gómez-Déniz et al. yang diperkenalkan oleh Gómez-Déniz dkk. (2011). Peubah acak *N* dikatakan berdistribusi Gómez-Déniz et al. dengan parameter $\alpha < 1,\ \alpha \neq 0$, dan $0 < \theta < 1$, jika mempunyai fungsi massa peluang:

$$p_n = P(N = n) = \frac{\ln(1 - \alpha\theta^n) - \ln(1 - \alpha\theta^{n+1})}{\ln(1 - \alpha)}\ ; n = 0, 1, 2 \ldots \qquad (2.3)$$

### 2.2.1. Sifat-sifat dari Distribusi Gómez-Déniz et al.

Gómez-Déniz dkk. (2011) menunjukkan bahwa distribusi Gómez-Déniz et al. bermodus tunggal, yaitu di $n = 0$. Ekspektasi dari peubah acak $N$ yang berdistribusi Gómez-Déniz et al. adalah:

$$E(N) = \frac{1}{\ln(1 - \alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - \alpha\theta^n).$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai:

$$E(N) = \frac{[\ln(\alpha\theta;\theta)_\infty]}{\ln(1-\alpha)} \tag{2.4}$$

dimana $(a;q)_\infty$ adalah simbol untuk $q$-Pochhammer, yang didefinisikan sebagai $(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)\,, 0 < q < 1$. Simbol $q$-Pochhammer mudah untuk didapatkan dan tersedia di dalam software standar seperti *Mathematica 7.0.* (Gómez-Déniz dkk. (2011)).

Varians dari peubah acak $N$ yang berdistribusi Gómez-Déniz et al. adalah:

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{1}{\ln(1-\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\ln(1-\alpha\theta^n) - [E(N)]^2 \tag{2.5}$$

**Tabel 2.1** Nilai rata-rata (atas) dan varians (bawah), untuk berbagai nilai $\alpha$ dan $\theta$.

| $\theta$ \ $\alpha$ | **-50** | **-25** | **-5** | **-1** | **-0,1** | **0** | **0,1** | **0,5** | **0,9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,10** | 0,572 | 0,461 | 0,256 | 0,257 | 0,116 | 0,111 | 0,105 | 0,082 | 0,082 |
| | 0,509 | 0,421 | 0,258 | 0,165 | 0,128 | 0,123 | 0,118 | 0,093 | 0,053 |
| **0,25** | 1,230 | 1,036 | 0,660 | 0,439 | 0,346 | 0,333 | 0,319 | 0,253 | 0,144 |
| | 1,437 | 1,202 | 0,791 | 0,560 | 0,459 | 0,444 | 0,428 | 0,351 | 0,211 |
| **0,50** | 2,918 | 2,521 | 1,740 | 1,253 | 1,032 | 1,000 | 0,965 | 0,791 | 0,471 |
| | 5,796 | 4,869 | 3,282 | 2,424 | 2,053 | 2,000 | 1,943 | 1,650 | 1,075 |
| **0,75** | 7,707 | 6,747 | 4,844 | 3, 641 | 3,082 | 3,000 | 2,910 | 2,454 | 1,544 |
| | 33,721 | 28,362 | 19,227 | 14,360 | 12,296 | 12,000 | 11,682 | 10,087 | 6,935 |
| **0,90** | 21,896 | 19,270 | 14,067 | 10,768 | 9,228 | 9,000 | 8,753 | 7,485 | 4,890 |
| | 251,498 | 211,574 | 143,580 | 107,442 | 92,182 | 90,00 | 87,661 | 75,955 | 53,157 |

*Sumber: Gómez-Déniz dkk. (2011)*

Tabel 2.1 menunjukkan hasil penelitian dari Gómez-Déniz dkk. (2011). Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa dapat diduga distribusi Gómez-Déniz et al. akan overdispersi ketika $0{,}25 \leq \theta < 1$ dan $\alpha \geq -50$, dan akan underdispersi ketika $0 < \theta < 0{,}1$ dan $\alpha \geq -25$. Ketika parameter $\alpha$ cenderung menuju nol, maka rata-ratanya akan cenderung menuju $\theta/(1-\theta)$, yang merupakan rata-rata dari peubah acak yang berdistribusi geometrik dengan parameter $0 < \theta < 1$.

### 2.2.2. Penaksiran Parameter Distribusi Gómez-Déniz et al.

Dalam bagian ini akan digunakan metode penaksiran kemungkinan maksimum untuk menaksir parameter dari distribusi Gómez-Déniz et al. Asumsikan bahwa $n_1, n_2, \ldots, n_t$ merupakan realisasi dari suatu sampel acak berukuran $t$ dari distribusi Gómez-Déniz et al. Fungsi log-likelihood-nya adalah:

$$\ell = -t\ln(\ln(1-\alpha)) + \sum_{i=1}^{t} \ln\left[\ln\left[\frac{1-\alpha\theta^{n_i}}{1-\alpha\theta^{n_i+1}}\right]\right].$$

Turunan pertama dari fungsi log-likelihood terhadap parameter-parameternya dan disamadengankan nol adalah:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{t}{(1-\alpha)\ln(1-\alpha)} + (\theta-1)\sum_{i=1}^{t} \frac{\theta^{n_i}}{(1-\alpha\theta^{n_i})\left(1-\alpha\theta^{n_i+1}\right)\left[\ln\left[\frac{1-\alpha\theta^{n_i}}{1-\alpha\theta^{n_i+1}}\right]\right]} = 0. \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{t} \frac{-n_i\alpha\theta^{n_i-1} + (n_i+1)\alpha\theta^{n_i} - \alpha^2\theta^{2n_i}}{(1-\alpha\theta^{n_i})(1-\alpha\theta^{n_i+1})\left[\ln\left[\frac{1-\alpha\theta^{n_i}}{1-\alpha\theta^{n_i+1}}\right]\right]} = 0. \tag{2.7}$$

Solusi dari dua Persamaan (2.6) dan (2.7) akan menghasilkan penaksir kemungkinan maksimum dari parameter $\alpha$ dan $\theta$. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mendapatkan solusi tersebut adalah metode Newton-Raphson.

Metode Newton-Raphson membutuhkan turunan kedua dari fungsi log-likelihood-nya, yaitu:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} = \frac{t[ln(1-\alpha)+1]}{[(1-\alpha)\ln(1-\alpha)]^2} + (\theta-1)\sum_{i=1}^{t} \frac{\theta^{2n_i}[\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)+\theta\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)+(1-\theta)]}{[\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)]^2}. \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} = \sum_{i=1}^{t} \frac{\left[-n_i(n_i-1)\alpha\theta^{n_i-2}+n_i(n_i+1)\alpha\theta^{n_i-1}-2n_i\alpha^2\theta^{2n_i-1}\right]}{[\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)]} - \sum_{i=1}^{t} \frac{\boldsymbol{s}(n_i;\alpha,\theta)\left[-n_i\alpha\theta^{n_i-1}\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)\right]}{[\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)]^2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{\boldsymbol{s}(n_i;\alpha,\theta)\left[(n_i+1)\alpha\theta^{n_i}\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)+\boldsymbol{s}(n_i;\alpha,\theta)\right]}{[\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)]^2}. \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \theta} = \sum_{i=1}^{t} \frac{[(n_i+1)\theta^{n_i}-n_i\theta^{n_i-1}]\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)}{[\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)]^2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{\left(\theta^{n_i+1}-\theta^{n_i}\right)\left[-n_i\alpha\theta^{n_i-1}\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)\right]}{[\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)]^2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{\left(\theta^{n_i+1}-\theta^{n_i}\right)\left[(n_i+1)\alpha\theta^{n_i}\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)+\boldsymbol{s}(n_i;\alpha,\theta)\right]}{[\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)]^2}. \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \alpha} = \sum_{i=1}^{t} \frac{[-n_i\theta^{n_i-1}+(n_i+1)\theta^{n_i}-2\alpha\theta^{2n_i}]\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)}{[\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)]^2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{\left(-n_i\alpha\theta^{n_i-1}+(n_i+1)\alpha\theta^{n_i}-\alpha^2\theta^{2n_i}\right)}{[\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)]^2} \times \sum_{i=1}^{t} \frac{\left[-\theta^{n_i}\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)-\theta^{n_i+1}\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)+\left(\theta^{n_i+1}-\theta^{n_i}\right)\right]}{[\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta)\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta)]^2}. \quad (2.11)$$

dimana;

$$\boldsymbol{p}(n_i;\alpha,\theta) = 1-\alpha\theta^{n_i},$$

$$\boldsymbol{q}(n_i;\alpha,\theta) = 1-\alpha\theta^{n_i+1},$$

$$\boldsymbol{r}(n_i;\alpha,\theta) = \ln\left[\frac{1-\alpha\theta^{n_i}}{1-\alpha\theta^{n_i+1}}\right],$$

$$\boldsymbol{s}(n_i;\alpha,\theta) = -n_i\alpha\theta^{n_i-1}+(n_i+1)\alpha\theta^{n_i}-\alpha^2\theta^{2n_i}.$$

Solusi numerik untuk nilai $\alpha$ dan $\theta$ didasarkan pada persamaan iterasi di bawah ini:

$$\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \theta_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{k-1}\\ \theta_{k-1}\end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2}\right|_{\substack{\alpha=\alpha_{k-1}\\ \theta=\theta_{k-1}}} & \left.\dfrac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \theta}\right|_{\substack{\alpha=\alpha_{k-1}\\ \theta=\theta_{k-1}}} \\ \left.\dfrac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \alpha}\right|_{\substack{\alpha=\alpha_{k-1}\\ \theta=\theta_{k-1}}} & \left.\dfrac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right|_{\substack{\alpha=\alpha_{k-1}\\ \theta=\theta_{k-1}}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial \ell}{\partial \alpha}\right|_{\substack{\alpha=\alpha_{k-1}\\ \theta=\theta_{k-1}}} \\ \left.\dfrac{\partial \ell}{\partial \theta}\right|_{\substack{\alpha=\alpha_{k-1}\\ \theta=\theta_{k-1}}} \end{pmatrix}; k = 1, 2, \cdots \quad (2.12)$$

dimana $\alpha_0$ dan $\theta_0$ disebut nilai awal untuk taksiran parameter dari $\alpha$ dan $\theta$. Proses iterasi dihentikan ketika nilai taksiran yang diperoleh sudah konvergen, atau $\sqrt{(\alpha_k - \alpha_{k-1})^2 + (\theta_k - \theta_{k-1})^2} < \varepsilon$, dimana $\varepsilon$ adalah nilai yang kecil, misalkan $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$.

### 2.3 Asuransi Kendaraan Bermotor

Dalam setiap kegiatan yang dilakukan oleh suatu kelompok atau perorangan pasti ada risiko yang harus ditanggung. Risiko merupakan kemungkinan terjadinya suatu kerugian yang tidak diduga atau tidak diinginkan. Ketidakpastian akan terjadinya risiko menjadi hal yang perlu diperhatikan dalam melakukan suatu kegiatan, karena hidup penuh dengan ketidakpastian dan manusia selalu berusaha memperkecil atau meminimumkan ketidakpastian tersebut. Risiko dapat terjadi dimanapun dan kapanpun, dimana jika risiko terjadi maka akan mengakibatkan kerugian. Salah satu upaya untuk menghindari risiko yaitu dengan memindahkan risiko kepada pihak lain. Asuransi merupakan bentuk perlindungan yang dapat menanggung kerugian dengan mengganti kerugian tersebut dengan cara klaim. Asuransi merupakan langkah yang tepat untuk mengalihkan kerugian tersebut dengan membuat perlindungan yang diatur dalam polis. Asuransi kendaraan bermotor merupakan salah satu dari jenis-jenis asuransi.

Asuransi kendaraan bermotor adalah produk asuransi kerugian yang melindungi tertanggung dari risiko kerugian yang mungkin timbul sehubungan dengan kepemilikan dan pemakaian kendaraan bermotor.

Ada dua jenis perlindungan untuk asuransi kendaraan bermotor, yaitu *Total Loss Only* (TLO) dan *Comprehensive* (Komprehensif).

a. *Total Loss Only* (TLO)

Jaminan ganti rugi atas kehilangan atau kerusakan total pada kendaraan akibat dari kejatuhan benda, kebakaran, perbuatan jahat, pencurian, perampasan, tabrakan, benturan atau kecelakaan lalu lintas lainnya. Dalam produk asuransi TLO, jenis klaim yang diajukan adalah *total loss*.

b. *Comprehensive* (Komprehensif)

Jaminan ganti rugi atau biaya perbaikan atas kehilangan atau kerusakan sebagian maupun keseluruhan pada kendaraan akibat kejatuhan benda, kebakaran, perbuatan jahat, pencurian, perampasan, tabrakan, benturan atau kecelakaan lalu lintas lainnya. Dalam produk asuransi *Comprehensive*, jenis klaim yang diajukan ada dua kemungkinan yaitu, *total loss* dan *partial loss*.

Perlu diketahui bahwa klaim *total loss* hanya dapat diajukan sekali oleh tertanggung ke penanggung. Sedangkan klaim *partial loss* dapat diajukan lebih dari sekali oleh tertanggung ke penanggung.

Peraturan Ketua Bapepam dan Lembaga keuangan (LK) pada tahun 2012 membagi kategori kendaraan bermotor menjadi delapan kategori jenis kendaraan seperti tertera pada Tabel 2.2.

**Tabel 2.2** Kategori Kendaraan Bermotor

| Kategori | Uang Pertanggungan |
|---|---|
| (1) | (2) |
| Jenis Kendaraan Non Bus dan Non Truk | |
| Kategori 1 | 0 s.d Rp. 150.000.000 |
| Kategori 2 | Rp. 150.000.001,00 s.d. Rp. 300.000.000,00 |
| Kategori 3 | Rp. 300.000.001,00 s.d. Rp. 500.000.000,00 |
| Kategori 4 | Rp. 500.000.001,00 s.d. Rp. 800.000.000,00 |
| Kategori 5 | Lebih dari Rp.800.000.000,00 |
| Jenis Kendaraan Bus dan Truk | |
| Kategori 6 | Truk, semua uang pertanggungan |
| Kategori 7 | Bus, semua uang pertanggungan |
| Jenis Kendaraan Roda 2 (dua) | |
| Kategori 8 | Semua uang pertanggungan |

*Sumber: Peraturan Ketua Bapepam dan LK 2012*

## 2.4. Distribusi Diskrit

Ada beberapa distribusi diskrit yang biasa digunakan untuk memodelkan frekuensi klaim asuransi, diantaranya adalah distribusi Poisson, binomial negatif, dan geometrik.

### 2.4.1 Distribusi Poisson

Peubah acak $N$ dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda > 0$ jika mempunyai fungsi densitas

$$p_n = P(N = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Rata-rata dan varians dari distribusi Poisson masing-masing adalah:

$$E(N) = \lambda,$$

$$Var(N) = \lambda.$$

### 2.4.2 Distribusi Binomial Negatif

Distribusi binomial negatif telah digunakan secara luas sebagai alternatif distribusi Poisson. Fungsi peluang dari distribusi binomial negatif dengan parameter $r > 0$ dan $\beta > 0$ adalah:

$$p_n = P(N = n) = \binom{n+r-1}{n}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^n; \quad n = 0, 1, 2, \dots, r > 0, \beta > 0.$$

Rata-rata, dan varians dari distribusi binomial negatif adalah:

$E(N) = r\beta,$

$V(N) = r\beta(1+\beta).$

### 2.4.3 Distribusi Geometrik

Distribusi geometrik merupakan kasus khusus dari distribusi binomial negatif ketika $r = 1$. Peubah acak $N$ dikatakan berdistribusi geometrik, jika dan hanya jika mempunyai fungsi peluang

$$p_n = P(N = n) = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \ \beta > 0$$

Rata-rata, dan varians dari distribusi geometrik adalah:

$E(N) = \beta,$

$Var(N) = \beta(1+\beta).$

## 2.5. Uji Kecocokan Chi-Kuadrat

Uji kecocokan adalah suatu pengujian hipotesis statistik yang digunakan untuk mengetahui apakah pengamatan $n_1, n_2, \dots, n_t$ adalah realisasi dari suatu sampel acak berukuran $t$ yang berdistribusi dengan fungsi distribusi $F$. Uji kecocokan dapat digunakan untuk menguji hipotesis berikut:

$H_0$ : $n_1, n_2, \dots, n_t$ merupakan realisasi dari sampel acak yang berdistribusi dengan fungsi distribusi $F$.

$H_1$ : $n_1, n_2, \dots, n_t$ merupakan realisasi dari sampel acak yang berdistribusi dengan fungsi distribusi bukan $F$.

Salah satu uji kecocokan distribusi yang paling tua dan dapat digunakan untuk kasus data diskrit adalah uji kecocokan chi-kuadrat. Statistik uji untuk menguji kecocokan chi-kuadrat untuk kasus data diskrit adalah

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \tag{2.1}$$

$$E_i = t \,.\, f_i \qquad i = 1,2, \dots , k \tag{2.2}$$

dimana $O_i$ adalah banyaknya pengamatan untuk kategori $i$, $E_i$ adalah nilai harapan untuk kategori $i$, $f_i$ adalah taksiran peluang untuk kategori $i$, dan $k$ adalah banyaknya kategori. Statistik uji di atas berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas $k$ - $s$ – 1. Dengan demikian kriteria pengujiannya adalah tolak hipotesis nol jika $\chi^2 \geq \chi^2_{(1-\upsilon)(k-s-1)}$, dimana $\upsilon$ menyatakan taraf nyata untuk pengujian dan $s$ menyatakan banyaknya parameter yang ditaksir dari distribusi.