

**ESTIMASI UTANG KLAIM PADA BISNIS ASURANSI  
LONG-TAIL BERDASARKAN JUMLAH ACAK  
BERKORELASI**

**DISERTASI**

**Karya tulis sebagai salah satu syarat  
untuk memperoleh gelar Doktor dari  
Institut Teknologi Bandung**

Oleh

**ACENG KOMARUDIN MUTAQIN**

**NIM : 30107005**

**(Program Studi Doktor Matematika)**



**INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG  
2012**

**ESTIMASI UTANG KLAIM PADA BISNIS ASURANSI  
LONG-TAIL BERDASARKAN JUMLAH ACAK  
BERKORELASI**

Oleh

**Aceng Komarudin Mutaqin**

**NIM : 30107005**

**(Program Studi Doktor Matematika)**

Institut Teknologi Bandung

Menyetujui

Tim Pembimbing

Tanggal 27 April 2012

Ketua

---

(Prof. Dr. Sutawanir Darwis)

Anggota

Anggota

---

(Dumaria R. Tampubolon, Ph.D.)

---

(Rianto A. Djojosingito, Ph.D., FSAI.)

## ABSTRAK

# ESTIMASI UTANG KLAIM PADA BISNIS ASURANSI LONG-TAIL BERDASARKAN JUMLAH ACAK BERKORELASI

Oleh

**Aceng Komarudin Mutaqin**

**NIM : 30107005**

**(Program Studi Doktor Matematika)**

Secara umum ada dua metode estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail*, yaitu metode agregat dan metode individu. Metode agregat merupakan metode estimasi utang klaim berdasarkan pada data agregat besarnya pembayaran klaim yang tersaji dalam bentuk *run-off triangle*. Sedangkan metode individu merupakan metode estimasi utang klaim berdasarkan data individu klaim pemegang polis. Metode agregat akan cocok digunakan jika klaim-klaim yang nilainya kecil jumlahnya banyak, dan bentuk *run-off triangle*-nya stabil. Metode individu sangat bermanfaat (i) untuk klaim-klaim besar, (ii) untuk *run-off triangle* yang tidak stabil, (iii) jika jumlah klaimnya sedikit, dan (iv) jika ada kovariat kontinu. Sampai saat ini, masih belum banyak penelitian-penelitian yang membahas masalah estimasi utang klaim menggunakan metode individu. Metode-metode individu yang telah ada didasarkan pada pemodelan data pada tingkatan klaim, bukan pada tingkatan pembayaran klaim. Padahal dalam bisnis asuransi *long-tail*, klaim dapat diselesaikan dalam lebih dari satu kali pembayaran. Dalam disertasi ini dibangun metode individu yang baru dengan melibatkan frekuensi pembayaran, besarnya pembayaran-pembayaran klaim, serta korelasi antar pembayaran berdasarkan jumlah acak berkorelasi (JAK).

Disertasi ini secara umum memberikan dua kontribusi. Kontribusi pertama terkait dengan pembangunan teori JAK baik distribusi, mean, variansi, persentil, serta masalah penaksirannya. Kasus khusus dari JAK adalah jumlah acak lognormal berkorelasi (JALNK) yang mengasumsikan bahwa distribusi gabungan bersyarat dari peubah-peubah acak komponen penyusun JAK bila diketahui banyaknya peubah-peubah acak tertentu adalah lognormal multivariat. Aproksimasi distribusi, mean, variansi, dan persentil dari JALNK diturunkan secara analitik. Aproksimasi distribusi dari JALNK merupakan campuran dari distribusi lognormal univariat. Dengan prinsip *plug-in*, diturunkan taksiran aproksimasi distribusi dari JALNK. Hasil simulasi Monte Carlo menunjukkan bahwa taksirannya secara statistik tidak berbeda dengan distribusi eksaknya untuk berapapun ukuran sampelnya, dan nilai koefisien korelasinya. Dua metode digunakan untuk menaksir parameter distribusi

JALNK, yaitu metode *likelihood* maksimum terpisah (MLMP) dan metode momen diperumum (*generalized moment method* – MMU). Hasil simulasi menunjukkan bahwa kedua metode tersebut konsisten dan secara umum MLMP lebih baik dibandingkan dengan MMU diperbarui kontinu. Tiga pendekatan diturunkan untuk menaksir mean dan variansi dari JALNK, yaitu (1) pendekatan nonparametrik dengan prinsip penaksiran metode momen (MM); (2) pendekatan parametrik dengan prinsip *plug-in* dan memanfaatkan penaksir *likelihood* maksimum dari distribusi lognormal multivariat dan parameter dari distribusi  $N$  (MP1); (3) pendekatan parametrik berdasarkan aproksimasi distribusi dari JALNK (MP2). Disertasi ini menunjukkan bahwa taksiran mean dengan MP1 dari distribusi *compound* binomial-lognormal berkorelasi dan distribusi *compound* Poisson-lognormal berkorelasi merupakan penaksir yang tak-bias asimtotik. Semua metode penaksiran mean dan variansi JALNK konsisten, kecuali metode penaksiran MP1 untuk menaksir variansi. Hasil simulasi menunjukkan bahwa hampir di sebagian besar kasus yang dicobakan MP1 merupakan metode yang terbaik untuk menaksir mean dan variansi JALNK. Ketika  $N$  berdistribusi binomial, MM merupakan metode yang terbaik untuk menaksir variansi JALNK pada kasus  $m < 30$ . Untuk kasus  $N$  berdistribusi Poisson, metode MM merupakan metode yang terbaik untuk menaksir variansi JALNK, di lain pihak tidak ada satu pun metode yang terbaik untuk menaksir mean JALNK.

Kontribusi kedua dari disertasi ini adalah terkait dengan pembangunan metode estimasi utang klaim yang baru dalam bisnis asuransi *long-tail* menggunakan teori JALNK. Diasumsikan bahwa total besarnya pembayaran untuk suatu klaim sebagai JALNK. Ada dua metode estimasi utang klaim yang dikembangkan, yaitu metode yang bersifat kasar yang didasarkan pada ekspektasi dari JALNK, dan metode yang bersifat parametrik yang didasarkan pada distribusi bersyarat dari total pembayaran klaim. Secara umum, metode parametrik dengan melibatkan kovariat menjadi metode yang lebih akurat untuk estimasi utang klaim. Metode agregat chain ladder lebih akurat dibandingkan dengan metode lain untuk estimasi utang klaim untuk kasus total jumlah klaim lebih dari atau sama dengan 2.000 dan bentuk distribusi frekuensi pembayarannya menaik. Secara teori, metode parametrik yang melibatkan distribusi bersyarat lebih baik dalam estimasi utang klaim dibandingkan dengan metode parametrik lain. Hasil simulasi Monte Carlo juga menunjukkan bahwa metode parametrik ini yang lebih akurat. Namun demikian, perlu dilakukan studi lebih lanjut lagi dengan menambahkan jumlah simulasi untuk memperoleh hasil yang dapat dipertanggungjawabkan.

Hasil aplikasi terhadap data klaim asuransi *personal injury* menunjukkan bahwa metode chain ladder menjadi metode yang lebih akurat untuk kasus jumlah klaim yang banyak (22.036). Sedangkan untuk kasus jumlah klaim sedikit (500), metode parametrik yang melibatkan distribusi bersyarat dengan peubah penasihat hukum menjadi metode yang lebih akurat.

Kata kunci: jumlah acak berkorelasi, utang klaim, bisnis asuransi *long-tail*, distribusi lognormal multivariat, metode chain ladder, simulasi Monte Carlo.

## **ABSTRACT**

# **THE ESTIMATION OF OUTSTANDING CLAIMS LIABILITY IN LONG-TAIL INSURANCE BUSINESS BASED ON CORRELATED RANDOM SUM**

**Aceng Komarudin Mutaqin**

**NIM : 30107005**

**(Mathematics Doctoral Program)**

In long-tail insurance business, there are many different statistical methods are available for estimating outstanding claim liability (OCL). In general, there are two different approaches to estimate OCL. One of these approaches is based on the aggregate claim payments data which summarized in a run-off triangle (aggregate method), and the other one is based on the individual claim payments data (individual method). The aggregate claim payments data analysis is often reasonable where there are large numbers of small claims, and the run-off pattern is stable. On the other side, the individual claim payments data analysis most useful for large claims, unstable run-off pattern, a few number of claims, and if there are continuous covariates.

In long-tail insurance business, a claim can be settled by more than one payment. The existing individual methods are based on modeling claim data. This dissertation develops estimation method of OCL by involving payment frequency, payments amount, and correlation between payments based on correlated random sum. The major contributions of the dissertation are to construct the theory of correlated random sum (CRS), and to construct the new estimation method of OCL using theory of CRS. The distribution, mean, variance, and percentile of CRS are discussed. The special case of CRS is correlated lognormal random sum (CLNRS), where the conditional joint distribution of the random variables of CRS given number random variables is multivariate lognormal. Approximate distribution of CLNRS is derived, where the resulting distribution is mixture of lognormal distribution. The estimated approximation distribution using plug-in principle is obtained. It is statistically not different from its exact distribution for any sample size and correlation coefficient. Two methods are used to estimate parameters of CLNRS distribution, i.e., separated maximum likelihood estimation (SMLM) and generalized moment method (GMM). Simulation result shows that both methods are consistent. Another result shows that SMLM method is better than continuous-updating GMM method. One moment method (MM) and two parametric methods (MP1 and MP2) are used to estimate mean and variance of CLNRS. This dissertation shows that estimated mean of compound binomial-correlated lognormal and compound

Poisson-correlated lognormal distributions are asymptotically unbiased estimators. All methods are consistent except MP1 to estimate variance. The Monte Carlo simulation shows that for almost cases MP1 is the best method to estimate mean and variance of CLNRS. MM is the best method to estimate variance of CLNRS for  $m < 30$  and the distribution of  $N$  is binomial. When the distribution of  $N$  is Poisson, MM is the best method to estimate variance of CLNRS, on the other side there is no one best method to estimate mean of CLNRS.

Two new methods to estimate OCL are constructed, i.e., the methods based on expectation of CLNRS, and parametric method based on conditional distribution of total claim payments. In general, parametric method with covariate is more accurate to estimate OCL. Chain ladder method more accurate than others for total number of claims  $\geq 2.000$  and the probability function of payment frequency is increasing. In theory, parametric method with conditional distribution is better than others. The simulation also shows that the method is more accurate than others. But it need more simulation to validate the theory.

The application on personal injury insurance claims shows that chain ladder method is more accurate for large number of claims (22.036). On the other side, for small number of claims (500), parametric method with involving legal representative is more accurate.

keywords: correlated random sum, outstanding claim liability, long-tail insurance business, multivariate lognormal distribution, chain ladder method, Monte Carlo simulation.

## **PEDOMAN PENGGUNAAN DISERTASI**

Disertasi Doktor yang tidak dipublikasikan terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Institut Teknologi Bandung, dan terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta ada pada pengarang dengan mengikuti aturan HaKI yang berlaku di Institut Teknologi Bandung. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau peringkasan hanya dapat dilakukan seizin pengarang dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Memperbanyak atau menerbitkan sebagian atau seluruh disertasi haruslah seizin Direktur Program Pascasarjana, Institut Teknologi Bandung.

*Disertasi ini didedikasikan untuk*  
*Almarhum bapak tercinta, Amiruddin; Ibu tercinta, Enok Ikah;*  
*Istri tercinta, Lia Rahayu; serta anak-anak tersayang*  
*Umar Ash Shiddiq M., Alia Az Zahra M., dan Hamzah Amiruddin M.*

## KATA PENGANTAR

Segala puji hanya milik Allah SWT. yang telah memberikan kekuatan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan penelitian dan penulisan disertasi ini.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Dr. Sutawanir Darwis selaku Ketua Tim Pembimbing yang mempunyai sifat rendah hati dan dengan sabar meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, saran, arahan dan nasihat selama penelitian berlangsung dan selama penulisan disertasi ini.

Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada Dumaria R. Tampubolon, Ph.D., dan Rianto A. Djojogugito, Ph.D., FSAI., selaku Anggota Tim Pembimbing atas bimbingan, saran, kritik, semangat, dan transfer ilmu aktuariannya baik teori ataupun aplikasinya sehingga penelitian dapat selesai sesuai dengan rencana.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada tim pembaca disertasi, yaitu Khreshna I. A. Syuhada, Ph.D., Muhammad Syamsuddin, Ph.D., dan Dr. Danardono, MPH. Atas kritik dan sarannya sehingga disertasi ini menjadi lebih berbobot.

Selanjutnya rasa hormat dan ucapan terima kasih yang terdalam disampaikan kepada kedua orangtua atas do'a serta dukungan materinya sehingga penulis memiliki ketenangan dalam studi. Tak lupa, terima kasih penulis sampaikan kepada istri dan anak-anak tercinta. Kalianlah yang membuat penulis selalu semangat untuk tetap studi dan merampungkannya.

Terima kasih juga disampaikan kepada Departemen Pendidikan Nasional atas bantuan Beasiswa Pendidikan Pascasarjana (BPPs) dalam rentang waktu tahun 2007–2010.

Selanjutnya penulis mengucapkan terima kasih kepada teman-teman dosen di lingkungan Program Studi Statistika, Fakultas MIPA Universitas Islam Bandung atas dukungan, semangat dan pengertiannya selama penulis menuntut ilmu.

Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada rekan-rekan mahasiswa Program Doktor Matematika ITB atas dukungan, diskusi, kebersamaan, dan pengertiannya selama penulis studi di ITB.

Terakhir penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang belum disebutkan di atas, baik langsung ataupun tidak langsung berkontribusi atas selesainya penelitian dan penulisan disertasi ini.

Semoga semua kebaikan yang telah ditebarkan oleh semua pihak mendapatkan balasan dengan yang lebih baik dan lebih banyak dari yang Maha Kuasa.

Bandung, 27 April 2012

Penulis

## DAFTAR ISI

ABSTRAK	i
ABSTRACT	iii
PEDOMAN PENGGUNAAN DISERTASI	v
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR LAMPIRAN	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR SINGKATAN DAN LAMBANG	xv
Bab I    Pendahuluan	1
I.1    Latar Belakang Penelitian	1
I.2    Masalah Penelitian	4
I.3    Tujuan Penelitian	5
I.4    Metode dan Diagram Penelitian	6
I.5    Sistematika Penulisan	8
Bab II    Jumlah Acak dan Metode-metode Estimasi Utang Klaim	9
II.1    Jumlah Acak	9
II.2    Metode-metode Estimasi Utang Klaim	11
II.2.1    Metode Chain Ladder	11
II.2.2    Metode Wright	13
II.2.3    Metode Menggunakan <i>Generalized Linear Models</i>	13
Bab III    Jumlah Acak Berkorelasi	15
III.1    Mean dan Variansi dari JAK	15
III.2    Jumlah Acak Lognormal Berkorelasi	17
III.3    Distribusi dari JALNK	19
III.4    Metode Penaksiran	24
III.4.1    Penaksiran Parameter Distribusi Eksak dari JALNK	25
III.4.2    Penaksiran Mean dan Variansi dari JALNK	29

III.4.3	Penaksiran Parameter dan Karakteristik dari Aproksimasi Distribusi JALNK	32
III.5	Studi dan Hasil Simulasi	34
III.5.1	Evaluasi Metode Penaksiran Parameter Distribusi Eksak JALNK	35
III.5.2	Perbandingan Hasil Penaksiran Mean dan Variansi JALNK	40
III.5.3	Kinerja Taksiran Aproksimasi Distribusi dari JALNK	46
Bab IV	Aplikasi Jumlah Acak Berkorelasi untuk Pengembangan Estimasi Utang Klaim	50
IV.1	Metode Estimasi Kasar untuk Utang Klaim	51
IV.2	Metode Estimasi Utang Klaim dengan Melibatkan Distribusi Bersyarat dari Total Pembayaran Klaim	54
IV.3	Kinerja Metode-metode Estimasi Utang Klaim	57
IV.4	Aplikasi Metode Estimasi Utang Klaim pada Data Nyata	65
IV.4.1	Data Klaim Asuransi <i>Personal Injury</i> dan Hasil Analisis Statistik	65
IV.4.2	Estimasi Utang Klaim Asuransi <i>Personal Injury</i>	69
Bab V	Kesimpulan	72
	DAFTAR PUSTAKA	77
	LAMPIRAN	82
	RIWAYAT HIDUP	87

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A	Hasil pendahuluan penakair MLMP dan MMU dua-tahap, iteratif, dan diperbarui kontinu untuk $N$ berdistribusi $\text{bin}(3;0,5)$	83
Lampiran B	Bias dan RKK dari tiga penaksir mean dan variansi JALNK	84
Lampiran C	Nilai aktual untuk rata-rata dan simpangan baku persentase penyimpangan hasil estimasi utang klaim dari metode MM, MP1, MP2, dan MCL	85

## DAFTAR GAMBAR

Gambar I.1	Diagram penelitian	6
Gambar III.1	Kurva aproksimasi fungsi densitas peluang	22
Gambar III.2	Kurva aproksimasi fungsi distribusi kumulatif	22
Gambar IV.1	Perbandingan rata-rata persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran berdistribusi $DU(1,5)$	60
Gambar IV.2	Perbandingan simpangan baku persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran berdistribusi $DU(1,5)$	61
Gambar IV.3	Perbandingan rata-rata persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran berdistribusi seperti Persamaan (IV.6)	61
Gambar IV.4	Perbandingan simpangan baku persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran berdistribusi seperti Persamaan (IV.6)	62
Gambar IV.5	Perbandingan rata-rata persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran berdistribusi seperti Persamaan (IV.7)	62
Gambar IV.6	Perbandingan simpangan baku persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran berdistribusi seperti Persamaan (IV.7)	63
Gambar IV.7	Histogram data total besar klaim tanpa memperhatikan penggunaan penasihat hukum	66
Gambar IV.8	Histogram data total besar klaim dengan memperhatikan penggunaan penasihat hukum	68

## DAFTAR TABEL

Tabel I.1	Peubah acak dalam <i>run-off triangle</i> dan <i>future triangle</i>	2
Tabel III.1	Struktur data dari JAK	24
Tabel III.2	Bias dan RKK dari penaksir MLMP untuk $N \sim \text{bin}(3;0,5)$	36
Tabel III.3	Bias dan RKK dari penaksir MMU diperbarui kontinu untuk $N \sim \text{bin}(3;0,5)$	37
Tabel III.4	Bias dan RKK dari penaksir MLMP untuk $N \sim \text{DU}(1,3)$	37
Tabel III.5	Bias dan RKK dari penaksir MMU diperbarui kontinu untuk $N \sim \text{DU}(1,3)$	38
Tabel III.6	Konsistensi dari penaksir MLMP untuk $N \sim \text{bin}(3;0,5)$	38
Tabel III.7	Konsistensi dari penaksir MMU diperbarui kontinu untuk $N \sim \text{bin}(3;0,5)$	39
Tabel III.8	Konsistensi dari penaksir MLMP untuk $N \sim \text{DU}(1,3)$	39
Tabel III.9	Konsistensi dari penaksir MMU diperbarui kontinu untuk $N \sim \text{DU}(1,3)$	39
Tabel III.10	Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK* untuk $N \sim \text{DU}(1,5)$ dan $\theta = 1$	41
Tabel III.11	Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK* untuk $N \sim \text{DU}(1,5)$ dan $\theta = 5$	42
Tabel III.12	Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK* untuk $N \sim \text{bin}(5;0,5)$ dan $\theta = 1$	42
Tabel III.13	Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK* untuk $N \sim \text{bin}(5;0,5)$ dan $\theta = 5$	43
Tabel III.14	Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK* untuk $N \sim \text{Poisson}(\eta = 2)$ dan $\theta = 1$	43
Tabel III.15	Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK* untuk $N \sim \text{Poisson}(\eta = 2)$ dan $\theta = 5$	44
Tabel III.16	Ukuran konsistensi dari penaksir mean dan variansi JALNK* untuk $N \sim \text{DU}(1,5)$ dan $\theta = 1$	44

Tabel III.17	Ukuran konsistensi dari penaksir mean dan variansi JALNK untuk $N \sim DU(1,5)$ dan $\theta = 5$	45
Tabel III.18	Ukuran konsistensi dari penaksir mean dan variansi JALNK untuk $N \sim \text{bin}(5;0,5)$ dan $\theta = 1$	45
Tabel III.19	Ukuran konsistensi dari penaksir mean dan variansi JALNK untuk $N \sim \text{bin}(5;0,5)$ dan $\theta = 5$	45
Tabel III.20	Ukuran konsistensi dari penaksir mean dan variansi JALNK untuk $N \sim \text{Poisson}(\eta = 2)$ dan $\theta = 1$	46
Tabel III.21	Ukuran konsistensi dari penaksir mean dan variansi JALNK untuk $N \sim \text{Poisson}(\eta = 2)$ dan $\theta = 5$	46
Tabel III.22	Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel, $m = 10$	48
Tabel III.23	Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel, $m = 20$	48
Tabel III.24	Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel, $m = 30$	48
Tabel III.25	Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel, $m = 50$	48
Tabel III.26	Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel, $m = 100$	49
Tabel III.27	Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel, $m = 500$	49
Tabel III.28	Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel, $m = 1.000$	49
Tabel IV.1	Nilai-nilai parameter untuk distribusi besarnya Pembayaran	59
Tabel IV.2	Hasil simulasi untuk semua metode estimasi	64
Tabel IV.3	Nilai-nilai statistik untuk data total besar klaim	66
Tabel IV.4	Hasil estimasi utang klaim asuransi <i>personal injury</i> untuk total klaim 22.036	70
Tabel IV.5	Hasil estimasi utang klaim asuransi <i>personal injury</i> untuk total klaim 500	71

## DAFTAR SINGKATAN DAN LAMBANG

SINGKATAN	Nama	Pemakaian pertama kali pada halaman
ELRF	<i>Extended Link Ratio Family</i>	2
PTF	<i>Probabilistic Trend Family</i>	2
GLM	<i>Generalized Linear Models</i>	2
JAK	jumlah acak berkorelasi	6
JA	Jumlah acak	9
JALNK	jumlah acak lognormal berkorelasi	15
FPM	fungsi pembangkit momen	19
MLMP	Metode likelihood maksimum terpisah	25
MMU	Metode momen diperumum	25
MM	Metode momen	26
PLM	Penaksir likelihood maksimum	30
MP1	metode parametrik pertama	34
MP2	metode parametrik kedua	34
RKK	rata-rata kesalahan kuadrat	35
MCL	metode chain ladder	57
MP3	Metode parametrik ketiga	64
 <b>LAMBANG</b>		
$W_{ij}$	peubah acak besarnya pembayaran agregat untuk semua klaim yang dilaporkan pada periode $i$ dan dibayarkan pada periode perkembangan $j$	2
$n$	banyaknya periode pelaporan	2
$Z_N$	jumlah acak dari peubah-peubah acak	9
$N$	peubah acak jumlah dari peubah-peubah acak penyusun $Z_N$	9
$X_1, \dots, X_N$	peubah-peubah acak penyusun $Z_N$	9

$p_N(l)$	fungsi peluang untuk peubah acak $N$ yang dievaluasi pada $l$	9
$\nu$	ekspektasi dari $N$	9
$\tau^2$	variansi dari $N$	9
$F_X^{*l}(z)$	konvolusi lipat $l$ ( <i>l-fold convolution</i> ) dari fungsi distribusi kumulatif untuk peubah acak $X$ yang dievaluasi pada $z$	10
$F_X(z)$	fungsi distribusi kumulatif untuk peubah acak $X$ yang dievaluasi pada $z$	10
$F_{JA}(z)$	fungsi distribusi kumulatif dari JA yang dievaluasi pada $z$	10
$f_X(y)$	fungsi peluang untuk peubah acak $X$ yang dievaluasi pada $y$	10
$f_{JA}(z)$	fungsi peluang dari JA yang dievaluasi pada $z$	11
$D_{ij}$	peubah acak besarnya pembayaran agregat kumulatif untuk semua klaim yang dilaporkan pada periode $i$ dan dibayarkan sampai periode perkembangan $j$	11
$f_j$	faktor perkembangan $j$	12
$\hat{f}_j$	taksiran faktor perkembangan $j$	12
$ETUK_{MCL}$	estimasi total utang klaim menggunakan metode chain ladder	12
$\hat{R}_i$	estimasi total utang klaim untuk periode pelaporan $i$	12
$T_i$	peubah acak total pembayaran klaim yang telah diselesaikan untuk individu ke- $i$	13
$\alpha_i$	ekspektasi peubah acak $T_i$	13
$k(\alpha_i)$	fungsi penghubung ( <i>link function</i> ) yang dievaluasi pada $\alpha_i$	14
$\mathbf{y}_i$	vektor kovariat untuk klaim ke- $i$	14

$\beta$	vektor parameter yang tidak diketahui dalam model GLM	14
$\mu_i$	ekspektasi dari $X_i$	16
$\sigma_i^2$	variansi dari $X_i$	16
$\sigma_{i,j}^2$	kovariansi dari $X_i$ dan $X_j$	16
$\rho_{i,j}$	korelasi antara $X_i$ dan $X_j$	16
$DU(i, j)$	distribusi seragam diskrit, dimana nilai-nilai yang mungkin adalah $i, i + 1, \dots, j$	23
$f_{X_1, \dots, X_l}$	fungsi peluang untuk distribusi lognormal multivariat	17
$\theta_i$	elemen ke- $i$ dari vektor $\theta$	18
$\lambda_{i,j}$	elemen baris $i$ dan kolom $j$ dari matriks $\Lambda$	18
$E_{JALNK}$	rata-rata dari JALNK	18
$V_{JALNK}$	variansi dari JALNK	18
$f_1(l; s, p)$	fungsi peluang untuk distribusi binomial dengan parameter $s$ , dan $p$	19
$f_2(l; \eta)$	fungsi peluang untuk distribusi Poisson dengan parameter $\eta$	19
$\mu_{Z_l}, \sigma_{Z_l}^2$	parameter-parameter dari distribusi $Z_l$ (atau $Z_N N = l$ ) atau distribusi lognormal univariat yang masing-masing bersesuaian dengan rata-rata dan variansi dari distribusi normal univariat	19
$\tilde{\Psi}_{Z_l}$	aproksimasi FPM dengan menggunakan ekspansi Gauss-Hermite bagi $Z_l$	19
$\tilde{\Psi}_{\sum_{i=1}^l X_i}^{(c)}$	aproksimasi FPM dengan menggunakan ekspansi Gauss-Hermite bagi $\sum_{i=1}^l X_i$ yang berkorelasi	19
$M$	orde dari integrasi Hermite	20
$w_k$	bobot dalam ekspansi Gauss-Hermite	20

$a_k$	absis dalam ekspansi Gauss-Hermite	20
$\mathbf{C}$	akar kuadrat dari matriks $\mathbf{A}$	20
$c_{tj}$	elemen baris $t$ dan kolom $j$ dari matriks $\mathbf{C}$	20
$F_{\text{JALNK}}(z)$	fungsi distribusi dari JALNK yang dievaluasi pada $z$	20
$\tilde{F}_{Z_l}(z)$	aproksimasi untuk fungsi distribusi $F_{Z_l}(z)$	21
$\Phi(t)$	fungsi distribusi kumulatif normal baku yang dievaluasi pada $t$	21
$\tilde{F}_{\text{JALNK}}(z)$	aproksimasi fungsi distribusi kumulatif dari JALNK yang dievaluasi pada $z$	21
$\tilde{f}_{\text{JALNK}}(z)$	aproksimasi fungsi peluang dari JALNK yang dievaluasi pada $z$	21
$\tilde{\pi}_p$	aproksimasi persentil ke $100p$ , $0 < p < 1$ , dari JALNK	21
$\text{bin}(s; p)$	distribusi binomial dengan banyaknya percobaan $s$ , dan peluang sukses $p$	35
$\tilde{E}_{\text{JALNK}}$	aproksimasi rata-rata dari JALNK	23
$\tilde{V}_{\text{JALNK}}$	aproksimasi variansi dari JALNK	23
$Z_{N_k, k}$	JAK ke- $k$	24
$z_{n_k, k}$	realisasi dari $Z_{N_k, k}$	24
$n_k$	banyaknya $X$ untuk pengamatan ke- $k$	24
$m$	Banyaknya pengamatan JAK/banyaknya klaim yang telah diselesaikan	24
$\hat{\theta}_j, \hat{\lambda}_{k,j}$	penaksir tak-bias dari parameter-parameter distribusi lognormal multivariat	25
$B_j$	himpunan dari $r$ , $B_j = \{r: r \text{ adalah nomor pengamatan dari } X_j\}$	25
$r_j$	jumlah pengamatan dari $X_j$	25
$\hat{p}$	taksiran parameter $p$ menggunakan metode maksimum likelihood	26

$\hat{\eta}$	taksiran parameter $\eta$ menggunakan metode maksimum likelihood	26
$\phi$	vektor parameter distribusi eksak dari JALNK berdimensi $K$	26
$g(\phi)$	vektor fungsi parameter $\phi$	26
$h(Z_{N_k,k}, \phi)$	vektor fungsi dari $\phi$ dan $Z_{N_k,k}$ berdimensi $R$ dengan $R \geq K$	26
$\hat{\phi}$	Penaksir MMU dari vektor parameter $\phi$	26
$g_m(\phi)$	vektor fungsi parameter $\phi$ empirik	27
$Q_m(\phi)$	jumlah kuadrat diboboti	27
$W_m$	matriks bobot simetri dan definit positif yang merupakan bobot untuk setiap momen	27
$\hat{\phi}_{MMU}(W_m)$	penaksir MMU yang tergantung pada pilihan matriks bobot	28
$W_m^{opt}$	matriks bobot optimal	28
$S$	variansi asimtotik dari $\sqrt{m}g_m(\phi)$	28
$S_m$	penaksir yang konsisten untuk $S$	28
$\hat{\phi}_{[i]}$	penaksir MMU tahap $i$	28
$W_{[i]}$	matriks bobot tahap $i$	28
$I_R$	matriks identitas	28
$W_{[i]}^{opt}$	matriks bobot optimal tahap $i$	28
$\xi_J$	statistik uji untuk uji J atau uji Hansen	29
$E_1$	penaksir dengan menggunakan metode momen rata-rata dari JALNK	29
$V_1$	penaksir dengan menggunakan metode momen untuk variansi dari JALNK	30
$\hat{\mu}_j$	penaksir tak-bias bervariansi minimum seragam untuk rata-rata dari distribusi lognormal	30

$\hat{\sigma}_{j,j}^2$	penaksir tak-bias bervariansi minimum seragam untuk variansi dari distribusi lognormal	30
$\hat{\sigma}_{i,j}^2$	penaksir kovariansi dari distribusi lognormal	31
$g(t)$	deret tak terhingga	31
$E_2$	penaksir parametrik untuk mean dari JALNK dengan menggunakan prinsip <i>plug-in</i>	31
$V_2$	penaksir parametrik untuk variansi dari JALNK dengan menggunakan prinsip <i>plug-in</i>	31
$\hat{p}_N(l)$	penaksir untuk fungsi peluang bagi $N$	31
$f_1(l; s, \hat{p})$	penaksir dengan prinsip <i>plug-in</i> dari fungsi peluang untuk distribusi binomial	31
$f_2(l; \hat{\eta})$	penaksir dengan prinsip <i>plug-in</i> dari fungsi peluang untuk distribusi Poisson	32
$\hat{f}_{\text{JALNK}}(z)$	taksiran aproksimasi fungsi densitas peluang dari JALNK yang dievaluasi pada $z$	33
$\hat{F}_{\text{JALNK}}(z)$	taksiran aproksimasi fungsi distribusi dari JALNK yang dievaluasi pada $z$	33
$E_3$	taksiran aproksimasi rata-rata dari JALNK	34
$V_3$	taksiran aproksimasi variansi dari JALNK	34
$Z_{N_k,k}^f$	Peubah acak total besarnya pembayaran dengan $N_k$ kali pembayaran untuk klaim ke- $k$ yang telah diselesaikan	52
$X_{j,k}^f$	Peubah acak besarnya pembayaran ke- $j$ untuk klaim ke- $k$ yang telah diselesaikan	52
$d$	banyaknya klaim yang belum diselesaikan	52
$Z_{N_k,k}^u$	Peubah acak total besarnya pembayaran dengan $N_k$ kali pembayaran untuk klaim ke- $k$ yang belum diselesaikan	52
$X_{j,k}^u$	Peubah acak besarnya pembayaran ke- $j$ untuk klaim ke- $k$ yang belum diselesaikan	52
$E[TUK]$	ekspektasi total utang klaim	53

$ETUK_{MM}$	ekspektasi total utang klaim yang dihitung dengan menggunakan metode MM1	53
$ETUK_{MP1}$	ekspektasi total utang klaim yang dihitung dengan menggunakan metode MP1	53
$ETUK_{MP2}$	ekspektasi total utang klaim yang dihitung dengan menggunakan metode MP2	53
$F_{Z_N Z_j, N>j}(z)$	fungsi distribusi kumulatif bersyarat dari $Z_N Z_j, N > j$	54
$f_{Z_N Z_j, N>j}(z)$	fungsi densitas peluang bersyarat dari $Z_N Z_j, N > j$	54
$p_{N N>j}$	fungsi peluang bersyarat dari $N N > j$	54
$f_{Z_l Z_j}(z_l z_j)$	fungsi densitas peluang bersyarat dari $Z_l Z_j$	55
$f_{Z_i, Z_j}(z_i, z_j)$	fungsi densitas peluang gabungan $Z_i, Z_j$	55
$ETUK_{MP3}$	ekspektasi total utang klaim yang dihitung dengan menggunakan metode MP3	57
$U(0, T)$	distribusi seragam kontinu dalam selang $(0, T)$	57
$B(p)$	distribusi Bernoulli dengan parameter peluang sukses $p$	57

# Bab I Pendahuluan

## I.1 Latar Belakang Penelitian

Perusahaan asuransi umum berkewajiban menyediakan sejumlah uang yang nantinya akan dikeluarkan untuk membayar klaim-klaim yang telah dilaporkan. Uang pembayaran untuk klaim-klaim yang telah dilaporkan dan belum selesai dibayarkan disebut sebagai utang klaim (*outstanding claims*). Istilah utang klaim muncul karena adanya rentang waktu antara saat klaim dilaporkan sampai klaim tersebut diselesaikan.

Permasalahan menghitung besarnya utang klaim biasanya diselesaikan dengan menggunakan metode statistika, karena jumlah uang dan waktu pembayaran klaim tidak diketahui dengan pasti (bersifat acak). Derajat ketakpastiannya tergantung pada kelas bisnis asuransi. Secara umum ada dua kelas bisnis asuransi, yaitu *short-tail* dan *long-tail* (Olofsson, 2006). Asuransi kelas bisnis *short-tail* adalah suatu bisnis asuransi dimana waktu penundaan antara terjadinya klaim dan waktu penyelesaiannya singkat, seringkali kurang dari satu tahun. Contoh asuransi kelas bisnis *short-tail* adalah asuransi pencurian dan kebongkaran, asuransi kerusakan fisik mobil, asuransi kebakaran, dan asuransi gempa bumi (Phillips dkk., 1996). Asuransi kelas bisnis *long-tail* adalah suatu bisnis asuransi dimana waktu penundaan antara terjadinya klaim dan waktu penyelesaiannya lama, mungkin lebih dari satu tahun, bahkan seringkali lebih dari lima tahun (Atkins, 2001). Contoh asuransi kelas bisnis *long-tail* adalah asuransi tanggung gugat, asuransi malpraktik medis, asuransi pesawat terbang, dan reasuransi (Phillips dkk., 1996). Perlu diketahui bahwa dalam asuransi kelas bisnis *long-tail*, suatu klaim dapat diselesaikan oleh lebih dari satu kali pembayaran (Wright, 2007).

Secara umum metode estimasi utang klaim pada asuransi kelas bisnis *long-tail* terbagi ke dalam dua bagian besar. Pertama, metode estimasi utang klaim berdasarkan pada data agregat besarnya pembayaran klaim yang tersaji dalam bentuk *run-off triangle* (Tabel I.1.), yang selanjutnya akan disebut sebagai metode

agregat. Kedua, metode estimasi utang klaim berdasarkan data individu klaim pemegang polis, yang selanjutnya akan disebut sebagai metode individu. Peubah acak  $W_{ij}$  pada Tabel I.1. menyatakan besarnya pembayaran agregat untuk semua klaim yang terjadi pada periode kejadian  $i$  dan dibayarkan pada periode perkembangan  $j$ . Untuk sel  $(i, j)$  dengan  $i + j \leq n + 1$ ,  $W_{ij}$  teramati dan berada dalam *run-off triangle*, lainnya merupakan pengamatan-pengamatan yang akan datang dan berada dalam sel-sel yang berwarna abu-abu atau *future triangle* (Olofsson, 2006). *Future triangle* memuat semua utang klaim yang menjadi tanggung jawab perusahaan asuransi kelas bisnis *long-tail*.

Tabel I.1. Peubah acak dalam *run-off triangle* dan *future triangle*

Periode Kejadian	Periode Perkembangan						
	1	2	...	$j$	...	$n - 1$	$n$
1	$W_{1,1}$	$W_{1,2}$	...	$W_{1,j}$	...	$W_{1,n-1}$	$W_{1,n}$
2	$W_{2,1}$	$W_{2,2}$	...	$W_{2,j}$	...	$W_{2,n-1}$	$W_{2,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$i$	$W_{i,1}$	$W_{i,2}$	...	$W_{i,j}$	⋮	$W_{i,n-1}$	$W_{i,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n - 1$	$W_{n-1,1}$	$W_{n-1,2}$	⋮	$W_{n-1,j}$	...	$W_{n-1,n-1}$	$W_{n-1,n}$
$n$	$W_{n,1}$	$W_{n,2}$	...	$W_{n,j}$	...	$W_{n,n-1}$	$W_{n,n}$

Metode agregat dapat dibagi lagi menjadi dua, yaitu yang sifatnya deterministik dan probabilistik. Metode chain ladder merupakan metode agregat deterministik yang paling populer untuk mengestimasi utang klaim (Mack, 1993). Metode ini umum digunakan karena kemudahannya. Metode agregat lain yang tergolong deterministik adalah metode *separation* (Hossack dkk., 1999).

Metode agregat probabilistik terbagi dalam dua bagian besar yaitu: klasik dan Bayes. Metode-metode agregat klasik diantaranya adalah model-model regresi berdasarkan *link ratio* (Brosius, 1992; Murphy, 1994; dan Mack, 1994); Barnett dan Zehnwirth (2000) menggunakan model-model regresi yang disebut ELRF (*Extended Link Ratio Family*) dan PTF (*Probabilistic Trend Family*); England dan Verrall (2002) menggunakan model-model yang termasuk dalam GLM

(*Generalized Linear Models*); Sedangkan De Jong (2006) menggunakan model deret waktu. Metode agregat Bayes untuk mengestimasi utang klaim telah digunakan oleh Jewell (1989, 1990), Verrall (1990), dan Haastrup dan Arjas (1996). De Alba (2006) menggunakan metode agregat Bayes untuk mengestimasi utang klaim ketika ada nilai negatif dalam *run-off triangle*.

Taylor dkk. (2003) menyatakan bahwa awal berkembangnya metode agregat karena adanya keterbatasan dalam masalah komputasi. Metode agregat akan cocok digunakan jika klaim-klaim yang nilainya kecil jumlahnya banyak, dan bentuk *run-off triangle*-nya stabil (De Alba, 2006). Wright (2007) menyatakan bahwa pada kenyataannya pemodelan data agregat secara probabilistik rumit karena distribusinya tergantung pada frekuensi dan besarnya pembayaran individu, dan di akhir-akhir periode perkembangan seringkali memuat nilai pembayaran yang besar. Di sisi lain, Wright (2007) menyatakan bahwa metode individu sangat bermanfaat (i) untuk *run-off triangle* yang tidak stabil, (ii) jika jumlah klaimnya sedikit, dan (iii) jika ada kovariat kontinu.

Sampai saat ini, masih sedikit penelitian-penelitian yang membahas masalah estimasi utang klaim menggunakan metode individu. Penelitian-penelitian tersebut dikemukakan oleh Wright (1997), Taylor dan McGuire (2004) yang kemudian diperluas oleh McGuire (2007), dan Taylor dkk. (2006).

Wright (1997) memodelkan data besarnya klaim individu pemegang polis yang dibayarkan menggunakan prinsip model risiko kolektif. Distribusi peluang untuk besarnya pembayaran klaim di masa datang pada tingkat individu pemegang polis dimodelkan menggunakan konsep distribusi campuran. Sedangkan distribusi peluang untuk banyaknya pembayaran klaim di masa datang dimodelkan menggunakan distribusi binomial negatif. Dengan mengkombinasikan kedua distribusi di atas akan diperoleh distribusi peluang total utang klaim. Berdasarkan distribusi tersebut dapat dihitung estimasi total utang klaim perusahaan asuransi di masa datang.

Taylor dan McGuire (2004) melakukan studi kasus untuk mengestimasi utang klaim berdasarkan data klaim individu pemegang polis yang telah diselesaikan

pada perusahaan asuransi di negara Australia menggunakan GLM. Besarnya pembayaran klaim yang telah diselesaikan dimodelkan berdasarkan kovariat waktu operasi, pengaruh musiman, periode penyelesaian klaim, interaksi waktu operasi dengan periode penyelesaian klaim, dan interaksi waktu operasi dengan periode pelaporan. McGuire (2007) memperluas hasil yang telah dilakukan oleh Taylor dan McGuire di atas dengan melibatkan kovariat tingkat keparahan klaim dan perundang-undangan serta penambahan data yang diolah.

Taylor dkk. (2006) membahas beberapa bentuk model klaim individu untuk tujuan mengestimasi utang klaim. Model-modelnya diformulasikan dalam bentuk GLM. Model-model yang dibangun adalah *paid model*, *incurred model*, *blended model*, dan *unified model*. Kovariat-kovariat yang dilibatkan adalah periode pelaporan, periode perkembangan, waktu operasi, dan *case estimates*. Kesalahan prediksi dari hasil estimasi utang klaim dihitung dengan menggunakan teknik bootstrap.

## **I.2 Masalah Penelitian**

Metode-metode individu yang telah ada didasarkan pada pemodelan data pada tingkatan klaim, bukan pada tingkatan pembayaran klaim. Metode Wright (1997) hanya dapat digunakan jika setiap klaim diselesaikan oleh sekali pembayaran. Dalam bisnis asuransi *long-tail*, hal ini tidak berlaku karena suatu klaim dapat diselesaikan dalam lebih dari satu kali pembayaran (Wright, 2007). Dengan demikian belum ada metode individu yang melibatkan frekuensi pembayaran dan besarnya pembayaran-pembayaran untuk suatu klaim. Karena suatu klaim dapat diselesaikan lebih dari satu kali pembayaran, maka kejadian-kejadian pembayaran untuk suatu klaim diduga mengandung korelasi. Korelasi ini diduga mempengaruhi hasil estimasi utang klaim. Pengaruh korelasi ini belum dilibatkan dalam menghitung estimasi utang klaim oleh metode-metode individu yang ada.

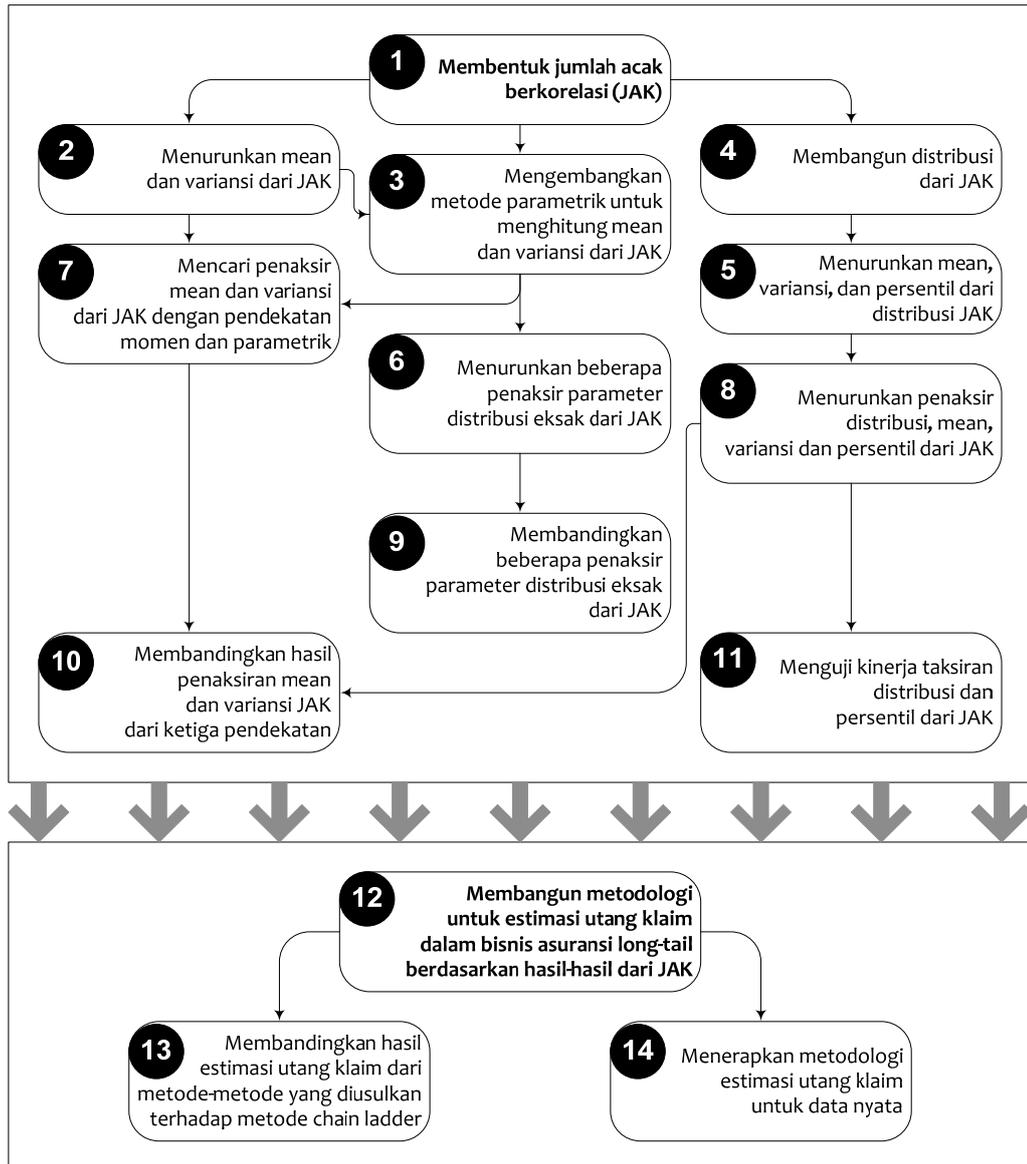
Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang dapat diidentifikasi adalah:

1. Bagaimana membangun metode individu yang baru untuk estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail* dengan melibatkan frekuensi pembayaran, besarnya pembayaran-pembayaran, dan korelasi antar pembayaran untuk suatu klaim?
2. Bagaimana kinerja metode individu yang baru untuk estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail*?
3. Bagaimana perbandingan metode individu yang baru dengan metode chain ladder?
4. Bagaimana aplikasi metode individu yang baru pada data nyata?

### **I.3 Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penelitian disertasi ini adalah:

1. Membangun metode individu yang baru untuk estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail* dengan melibatkan frekuensi pembayaran, besarnya pembayaran-pembayaran, dan korelasi antar pembayaran untuk suatu klaim berdasarkan jumlah acak berkorelasi (*correlated random sum*).
2. Mengkaji kinerja metode individu yang baru untuk estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail* menggunakan simulasi Monte Carlo.
3. Membandingkan hasil estimasi utang klaim melalui metode individu yang baru dengan hasil estimasi utang klaim melalui metode chain ladder menggunakan simulasi Monte Carlo.
4. Mengaplikasikan metode individu yang baru pada data nyata yaitu mengenai data klaim produk asuransi tanggung gugat *personal injury* yang terjadi mulai Juli 1989 sampai Juni 1999 (De Jong dan Heller, 2008).



Gambar I.1. Diagram penelitian

#### I.4 Metode dan Diagram Penelitian

Gambaran umum pelaksanaan penelitian disertasi ini ditunjukkan dalam Gambar I.1. Penjelasan yang lebih lengkap dari gambar tersebut adalah:

1. Penelitian dimulai dengan membentuk jumlah acak berkorelasi (JAK).
2. Menurunkan mean dan variansi dari JAK dengan terlebih dahulu menetapkan beberapa asumsi.

3. Mengembangkan metode yang bersifat parametrik untuk menghitung mean dan variansi dari JAK dengan mengasumsikan distribusi lognormal multivariat untuk peubah-peubah acak komponen penyusun JAK.
4. Membangun distribusi dari peubah JAK dengan memperluas hasil dari Mehta dkk. (2007), dimana gabungan peubah-peubah acak komponen penyusun JAK diasumsikan berdistribusi lognormal multivariat.
5. Menurunkan karakteristik dari distribusi JAK di atas, yaitu mean, variansi dan persentil.
6. Menurunkan penaksir parameter distribusi eksak dari JAK menggunakan metode *likelihood* maksimum dan metode momen diperumum.
7. Mencari penaksir untuk mean dan variansi dari JAK dengan menggunakan pendekatan momen dan pendekatan parametrik.
8. Mencari penaksir distribusi JAK dan karakteristiknya yaitu mean, variansi dan persentil.
9. Melakukan simulasi Monte Carlo untuk melihat perbandingan kinerja dari dua metode penaksir parameter distribusi eksak dari JAK. Ukuran perbandingan kinerja didasarkan pada bias, rata-rata kesalahan kuadrat (*mean squared error*) dan ukuran konsistensi.
10. Melakukan simulasi Monte Carlo untuk melihat perbandingan kinerja dari tiga metode penaksiran untuk mean dan variansi dari JAK. Ketiga metode tersebut adalah metode momen, metode parametrik, dan metode yang didasarkan pada distribusi dari JAK. Ukuran perbandingan kinerja didasarkan pada bias, rata-rata kesalahan kuadrat (*mean squared error*) dan ukuran konsistensi.
11. Melakukan simulasi Monte Carlo untuk melihat kinerja taksiran distribusi dari JAK dan persentilnya.
12. Membangun metodologi baru untuk estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail* dengan memanfaatkan hasil-hasil yang berkaitan dengan JAK. Metodologi yang dibangun mengasumsikan bahwa total pembayaran untuk suatu klaim merupakan suatu peubah JAK.
13. Melakukan simulasi Monte Carlo untuk membandingkan hasil estimasi utang klaim antara metode-metode yang didasarkan pada JAK dengan metode chain ladder. Kovariat dari klaim juga akan coba dilibatkan untuk

melihat pengaruhnya pada hasil estimasi utang klaim. Ukuran yang akan digunakan sebagai bahan perbandingan adalah rata-rata dan galat baku (*standard error*) dari persentase penyimpangan hasil estimasi.

14. Menerapkan metode estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail* hasil pengembangan untuk data klaim produk asuransi tanggung gugat, yaitu *personal injury* yang terjadi mulai Juli 1989 sampai Juni 1999 (De Jong dan Heller, 2008).

## I.5 Sistematika Penulisan

Disertasi ini disusun dalam lima bab. Bab I memuat pendahuluan yang berisikan latar belakang penelitian, masalah penelitian, tujuan penelitian, metode dan diagram alir penelitian, serta sistematika penulisan disertasi. Tinjauan pustaka disajikan dalam Bab II yang berisikan uraian tentang jumlah acak dan metode-metode untuk estimasi utang klaim seperti metode chain ladder, metode Wright, dan GLM. Hasil utama penelitian dibahas dalam Bab III dan IV. Bab III membahas teori yang berkaitan dengan JAK seperti mean, variansi, distribusi dan persentilnya. Dalam bab ini diturunkan penaksir parameter distribusi eksak dari JAK. Penaksir momen dan parametrik untuk mean dan variansi dari JAK diturunkan dengan terlebih dahulu menetapkan beberapa asumsi. Tidak ketinggalan pula diturunkan penaksir untuk distribusi dan persentil dari JAK. Kinerja penaksir-penaksir dalam bab ini diuji dengan menggunakan simulasi Monte Carlo. Bab IV membahas pengembangan estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail* dengan menggunakan hasil-hasil yang diperoleh dalam Bab III. Dalam bab ini dibangun metodologi untuk estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail*. Perbandingan hasil estimasi utang klaim berdasarkan metode yang dikembangkan dengan metode chain ladder dilakukan dengan menggunakan simulasi. Metodologi yang dikembangkan diterapkan terhadap data nyata. Bab V merupakan bagian akhir dari disertasi ini yang memuat kesimpulan dan arah penelitian ke depan.

## Bab II Jumlah Acak dan Metode-metode Estimasi Utang Klaim

Di dalam Bab II akan dibahas secara ringkas teori yang berkaitan dengan jumlah acak dan beberapa metode untuk estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail*. Subbab II.1 berisikan pembahasan mengenai hal-hal yang berkaitan dengan teori jumlah acak seperti penurunan mean, variansi dan distribusinya. Sedangkan Subbab II.2 berisikan ulasan secara ringkas mengenai tiga metode estimasi utang klaim dalam bisnis asurans *long-tail*. Satu metode termasuk ke dalam metode agregat, sementara dua lagi termasuk ke dalam metode individu.

### II.1 Jumlah Acak

Misalkan

$$Z_N = X_1 + \dots + X_N, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

dengan  $Z_0 = 0$ . Jika diasumsikan bahwa

1. barisan  $X_1, \dots, X_N$  merupakan peubah-peubah acak saling bebas dan berdistribusi identik, dengan  $E(X_i) = \mu$ , dan  $Var(X_i) = \sigma^2$ ,
2.  $N$  merupakan suatu peubah acak diskrit yang bebas dari  $X_1, \dots, X_N$ , dan mempunyai fungsi massa peluang  $p_N(l) = P(N = l)$ , untuk  $l = 0, 1, 2, \dots$ , dengan  $E(N) = \nu$ , dan  $Var(N) = \tau^2$ ,

maka  $Z_N$  sering disebut sebagai jumlah peubah-peubah acak saling bebas atau jumlah acak (JA). Berdasarkan asumsi 1 dan 2 di atas, mean dan variansi dari JA adalah

$$E[Z_N] = \mu\nu, \tag{II.1}$$

dan

$$\text{Var}[Z_N] = \sigma^2\nu + \mu^2\tau^2. \quad (\text{II.2})$$

Fungsi distribusi kumulatif dari JA adalah

$$\begin{aligned} F_{JA}(z) &= P(Z_N \leq z) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P(Z_N \leq z | N = l) p_N(l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} F_X^{*l}(z) p_N(l), \end{aligned}$$

yang dikenal sebagai distribusi *compound*. Nilai-nilai dari distribusi *compound* untuk sebagian besar pilihan distribusi dari  $N$  dan  $X_j$ , hanya dapat diperoleh secara numerik. Akan tetapi, untuk kombinasi pilihan tertentu, hasil analitiknya ada (Klugman dkk. 2004).

Notasi  $F_X^{*l}(z)$  menyatakan konvolusi lipat  $l$  dari fungsi distribusi kumulatif untuk peubah acak  $X$ . Konvolusi tersebut dapat diperoleh sebagai berikut

$$F_X^{*0}(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0, \end{cases}$$

$$F_X^{*1}(z) = F_X(z),$$

dan

$$F_X^{*l}(z) = \int_0^z F_X^{*(l-1)}(z-y) f_X(y) dy, \quad l = 2, 3, \dots$$

untuk kasus  $X$  merupakan peubah acak kontinu dengan peluang nol pada nilai-nilai negatifnya, atau

$$F_X^{*l}(z) = \sum_{y=0}^z F_X^{*(l-1)}(z-y)f_X(y), \quad l = 2, 3, \dots$$

untuk kasus  $X$  merupakan peubah acak diskrit dengan peluang positif pada  $0, 1, 2, \dots$ .

Fungsi peluang untuk distribusi *compound* adalah

$$f_{JA}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_X^{*l}(z)p_N(l).$$

Teori JA telah digunakan oleh Wright (1997) untuk melakukan estimasi utang klaim, yang penjelasannya akan dikemukakan dalam subbab berikutnya.

## II.2 Metode-metode Estimasi Utang Klaim

Subbab ini membahas secara ringkas tiga metode estimasi utang klaim untuk bisnis asuransi *long-tail*. Ketiga metode tersebut adalah metode chain ladder, metode Wright, dan metode GLM.

### II.2.1 Metode Chain Ladder

Metode chain ladder (Mack, 1993) merupakan metode agregat untuk menghitung estimasi total utang klaim asuransi yang termasuk ke dalam kelas bisnis *long-tail*. Estimasinya didasarkan pada data agregat yang tersaji pada *run-off triangle* seperti pada Tabel I.1. Uraian mengenai *run-off triangle* dan beberapa permasalahannya dapat dilihat pada Mutaqin dkk. (2008a). Utang klaim merupakan penjumlahan sel-sel pada segitiga bawah dalam Tabel I.1.

Misalkan peubah acak  $D_{ij}$  menyatakan besarnya pembayaran agregat kumulatif untuk semua klaim yang terjadi pada periode kejadian  $i$  dan dibayarkan sampai periode perkembangan  $j$ , dengan

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^j W_{ik}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i+j \leq n+1.$$

Asumsi dari metode chain ladder adalah ada faktor-faktor perkembangan  $f_1, \dots, f_{n-1} > 0$ , dengan ekspektasi  $E[D_{i,j+1}|D_{i1}, \dots, D_{ij}] = D_{ij}f_j$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ , dan  $\{D_{i1}, \dots, D_{in}\}, \{D_{k1}, \dots, D_{kn}\}$ ,  $i \neq k$ , adalah saling bebas. Dalam metode chain ladder faktor perkembangan ditaksir oleh

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{k=1}^{n-j} W_{k,j+1}}{\sum_{k=1}^{n-j} W_{k,j}}, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Estimasi total utang klaim menggunakan metode chain ladder dihitung dengan menggunakan rumus

$$ETUK_{MCL} = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i,$$

dengan

$$\hat{R}_i = D_{i,n+1-i}(\hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{n-1} - 1), \quad 2 \leq i \leq n,$$

yang merupakan estimasi total utang klaim untuk periode kejadian  $i$ .

Galat baku (*standard error*) dari estimasi utang klaim untuk periode kejadian  $i$ , dan galat baku dari estimasi total utang klaim telah dibahas oleh Mack (1993). Mutaqin dkk. (2008b) telah membangun program dalam perangkat lunak MATLAB untuk menghitung estimasi utang klaim dan galat bakunya menggunakan metode chain ladder.

Metode chain ladder akan cocok digunakan jika bentuk *run-off triangle*-nya stabil (De Alba, 2006). Mutaqin dkk. (2009b) telah membuat prosedur pengujian kestabilan dari *run-off triangle*. Prosedur pengujiannya telah diterapkan terhadap dua kumpulan data yang sering digunakan oleh para peneliti.

## II.2.2 Metode Wright

Wright (1997) memodelkan data besarnya klaim individu pemegang polis menggunakan teori jumlah acak untuk membangun distribusi peluang dari total utang klaim. Tahapan untuk melakukan estimasi total utang klaimnya adalah:

- (i) membangun distribusi peluang besarnya pembayaran klaim di masa datang pada tingkat individu pemegang polis menggunakan konsep distribusi campuran.
- (ii) membangun distribusi peluang untuk frekuensi pembayaran klaim di masa datang.
- (iii) mengkombinasikan distribusi peluang yang dihitung pada tahap (i) dan (ii), untuk menghasilkan distribusi peluang dari total utang klaim. Berdasarkan distribusi peluang tersebut dapat dihitung estimasi total utang klaim baik berdasarkan momennya ataupun menggunakan ukuran persentilnya.

Uraian yang lebih detail mengenai metode Wright termasuk aplikasi artifisialnya dibahas dalam Wright (1997). Metode Wright ini telah diterapkan oleh Mutaqin dkk. (2009a) pada data klaim asuransi mobil.

## II.2.3 Metode Menggunakan *Generalized Linear Models*

*Generalized Linear Models* atau GLM merupakan model yang dipakai untuk studi kasus oleh para peneliti untuk memodelkan total pembayaran klaim individu pemegang polis pada asuransi kelas bisnis *long-tail*. Model GLM pertama kali dipakai oleh Taylor dan McGuire (2004) kemudian dikembangkan oleh Taylor dkk. (2006) dan McGuire (2007).

Misalkan peubah acak total pembayaran klaim yang telah diselesaikan untuk individu ke- $i$ ,  $T_i$ , diasumsikan mengikuti suatu distribusi dari keluarga distribusi eksponensial (misalnya gamma, dan lognormal), dengan ekspektasi dari  $T_i$  adalah,  $E[T_i] = \alpha_i$ . Bentuk dari GLM adalah

$$k(\alpha_i) = \mathbf{y}_i^T \boldsymbol{\beta},$$

dengan fungsi  $k$  disebut sebagai fungsi penghubung (*link function*),  $\mathbf{y}_i$  merupakan vektor kovariat untuk klaim ke- $i$ , dan  $\boldsymbol{\beta}$  merupakan vektor parameter yang tidak diketahui. Kovariat yang seringkali dilibatkan dalam estimasi utang klaim diantaranya adalah waktu operasi, periode pelaporan, periode perkembangan, dan keparahan klaim. Teori yang lengkap berkaitan dengan GLM dapat dilihat pada McCullagh dan Nelder (1989), serta de Jong dan Heller (2008).

Pemodelan GLM didasarkan pada data klaim individu yang telah diselesaikan. Estimasi utang klaim untuk suatu klaim yang belum diselesaikan dihitung dengan jalan mengurangkan hasil estimasi model GLM untuk klaim tersebut oleh data total pembayaran klaim tersebut sampai saat ini.

## Bab III Jumlah Acak Berkorelasi

Misalkan

$$Z_N = X_1 + \dots + X_N, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

dengan  $Z_0 = 0$ . Dalam teori jumlah acak yang dibahas dalam Subbab II.1,  $X_1, \dots, X_N$  diasumsikan saling bebas dan berdistribusi identik. Dalam situasi nyata,  $X_1, \dots, X_N$  bisa berkorelasi. Sebagai contoh dalam bidang asuransi, olahraga, lalu lintas internet, dan komunikasi. Beberapa penulis telah membahas jumlah peubah-peubah acak berkorelasi berkaitan dengan distribusi dan penaksiran parameternya (Kaas dkk., 2000; Mehta dkk., 2007; dan Chatelain dkk., 2008). Dalam penelitian-penelitian tersebut, diasumsikan bahwa  $N$  merupakan suatu konstanta, padahal dalam beberapa aplikasi seperti asuransi dan olahraga,  $N$  bisa merupakan suatu peubah acak diskrit. Jumlah acak berkorelasi (JAK) akan digunakan untuk menyatakan  $Z_N$ , yaitu jumlah peubah-peubah acak berkorelasi dengan  $N$  merupakan suatu peubah acak diskrit.

Isi dari Bab III adalah sebagai berikut. Subbab III.1 memuat penurunan mean dan variansi dari JAK. Dalam Subbab III.2 diturunkan mean dan variansi dari jumlah acak lognormal berkorelasi (JALNK). JALNK merupakan kasus khusus dari JAK dengan distribusi dari  $X_1, \dots, X_N$  diberikan  $N = l$  adalah lognormal multivariat. Aproksimasi distribusi untuk JALNK diusulkan di dalam Subbab III.3. Dalam subbab ini juga diturunkan karakteristik dari aproksimasi distribusi untuk JALNK seperti persentil, mean, dan variansi. Metode penaksiran untuk teori-teori yang dibahas dalam Subbab III.1 sampai III.3 diusulkan di dalam Subbab III.4. Unjuk kerja dari metode-metode penaksiran diselidiki dalam Subbab III.5 menggunakan simulasi Monte Carlo.

### III.1 Mean dan Variansi dari JAK

Misalkan  $Z_N = X_1 + \dots + X_N$ ,  $N = 0, 1, 2, \dots$ , dengan  $Z_0 = 0$ . Asumsikan bahwa  $X_1, \dots, X_N$  merupakan peubah-peubah acak berkorelasi. Misalkan  $N$  merupakan

suatu peubah acak diskrit, bebas dari  $X_1, \dots, X_N$  dan mempunyai fungsi massa peluang  $p_N(l) = P(N = l)$  untuk  $l = 0, 1, 2, \dots$ , kemudian asumsikan bahwa  $E[X_i] = \mu_i$ ,  $Var[X_i] = \sigma_i^2$ ,  $E[N] = \nu$ ,  $Var[N] = \tau^2$ ,  $Cov[X_i, X_j] = \sigma_{i,j}^2$ , dan  $\rho[X_i, X_j] = \rho_{i,j}$ , untuk  $i \neq j$ . Mean dan variansi dari JAK dapat diperoleh dengan memanfaatkan teorema mengenai ekspektasi bersyarat dan variansi bersyarat dalam Mood dkk. (1974). Mean dari  $Z_N$  adalah

$$\begin{aligned}
E[Z_N] &= E[E(Z_N|N)] \\
&= E[E(X_1 + X_2 + \dots + X_N|N)] \\
&= E[E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_N)] \\
&= E[\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_N] \\
&= E[\mu_N^*],
\end{aligned} \tag{III.1}$$

dengan  $\mu_N^* = \mu_1 + \dots + \mu_N$ . Sedangkan variansi dari JAK adalah

$$\begin{aligned}
Var[Z_N] &= E[Var(Z_N|N)] + Var[E(Z_N|N)] \\
&= E[Var(X_1 + X_2 + \dots + X_N|N)] + Var[E(X_1 + X_2 + \dots + X_N|N)] \\
&= E \left[ \sum_{i=1}^N Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^N Cov(X_i, X_j) \right] + Var \left( \sum_{i=1}^N E(X_i) \right) \\
&= E \left[ \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^N \sigma_{i,j}^2 \right] + Var[\mu_N^*].
\end{aligned} \tag{III.2}$$

Kasus-kasus khusus dapat diturunkan untuk menghitung mean dan variansi. Kasus pertama, Jika  $E[X_i] = \mu$ ,  $Var[X_i] = \sigma^2$ ,  $E[N] = \nu$ ,  $Var[N] = \tau^2$ , dan  $\rho[X_i, X_j] = \rho$ , maka mean dari JAK adalah

$$E[Z_N] = \mu\nu, \tag{III.3}$$

dan variansi dari JAK adalah

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Z_N] &= E \left[ \sum_{i=1}^N \sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^N \sigma^2 \rho \right] + \text{Var} \left[ \sum_{i=1}^N \mu \right] \\
&= E \left[ N\sigma^2 + 2 \frac{N(N-1)}{2} \sigma^2 \rho \right] + \text{Var}[N\mu] \\
&= \sigma^2 E[N] + \sigma^2 \rho E[N(N-1)] + \mu^2 \text{Var}[N] \\
&= \sigma^2 \nu + \sigma^2 \rho (\tau^2 + \nu^2 - \nu) + \mu^2 \tau^2. \tag{III.4}
\end{aligned}$$

Kasus kedua adalah kasus khusus dari kasus pertama ketika  $\rho = 0$ , dengan

$$E[Z_N] = \mu\nu, \tag{III.5}$$

dan

$$\text{Var}[Z_N] = \sigma^2 \nu + \mu^2 \tau^2. \tag{III.6}$$

Terlihat bahwa Persamaan (III.5) dan (III.6) masing-masing sama dengan Persamaan (II.1) dan (II.2). Kasus kedua ini tidak lain merupakan kasus untuk JA.

### III.2 Jumlah Acak Lognormal Berkorelasi

Misal diasumsikan bahwa distribusi gabungan dari  $X_1, \dots, X_N$  diberikan  $N = l$  adalah lognormal multivariat, dengan fungsi densitas peluang

$$\begin{aligned}
f_{X_1, \dots, X_l}(x_1, \dots, x_l) &= \frac{1}{(2\pi)^{l/2} \sqrt{|\mathbf{\Lambda}|}} (x_1 \dots x_l)^{-1} \times \\
&\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\ln \mathbf{x} - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{\Lambda}^{-1} (\ln \mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}) \right\}, \\
&\quad x_i > 0, i = 1, 2, \dots, l,
\end{aligned}$$

dengan  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_l)^T$ ,  $\ln \mathbf{x} = (\ln x_1, \dots, \ln x_l)^T$ ,  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_l)^T$ , dan  $\boldsymbol{\Lambda} = (\lambda_{i,j})$ . Uraian mengenai distribusi lognormal multivariat dapat dilihat dalam Kotz dkk. (2000), dan Kleiber dan Kotz (2003). Sedangkan  $N$  bisa berdistribusi peluang diskrit apapun. Untuk kasus seperti ini, peubah acak  $Z_N$  disebut sebagai jumlah acak lognormal berkorelasi (JALNK).

Mean dan variansi dari JALNK masing-masing adalah

$$\begin{aligned} E_{\text{JALNK}} &= E(Z_N) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^l E[X_l] \right] p_N(l) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^l \exp\left(\theta_i + \frac{\lambda_{i,i}}{2}\right) \right] p_N(l), \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

dan

$$\begin{aligned} V_{\text{JALNK}} &= \text{Var}(Z_N) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^l \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j>i}^l \sigma_{i,j}^2 \right] p_N(l) \\ &\quad + \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^l E[X_l] - E_{\text{JALNK}} \right]^2 p_N(l) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^l \exp(2\theta_i + \lambda_{i,i}) \{ \exp(\lambda_{i,i}) - 1 \} \right] p_N(l) \\ &\quad + 2 \sum_{l=2}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j>i}^l \exp\left\{ \left( \theta_i + \theta_j \right) + \frac{(\lambda_{i,i} + \lambda_{j,j})}{2} \right\} \{ \exp(\lambda_{i,j}) - 1 \} \right] p_N(l) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^l \exp\left(\theta_i + \frac{\lambda_{i,i}}{2}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k) \sum_{j=1}^k \exp\left(\theta_j + \frac{\lambda_{j,j}}{2}\right) \right]^2 p_N(l). \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Jika  $N$  berdistribusi binomial dengan parameter  $(s; p)$  (Casella dan Berger, 1990), maka distribusi dari JALNK disebut sebagai distribusi *compound binomial-lognormal berkorelasi* (*compound binomial-correlated lognormal distribution*). Mean

dan variansi dari distribusi *compound* binomial-lognormal berkorelasi masing-masing adalah seperti pada Persamaan (III.7) dan (III.8), dengan

$$p_N(l) = f_1(l; s, p) = \binom{s}{l} p^l (1-p)^{s-l}; \quad l = 0, 1, \dots, s. \quad (\text{III.9})$$

Begitu pula jika  $N$  berdistribusi Poisson dengan parameter  $\eta$  (Casella dan Berger, 1990), maka distribusi dari JALNK disebut sebagai distribusi *compound* Poisson-lognormal berkorelasi (*compound Poisson-correlated lognormal distribution*). Mean dan variansi dari distribusi *compound* Poisson-lognormal berkorelasi masing-masing adalah seperti pada Persamaan (III.7) dan (III.8), dengan

$$p_N(l) = f_2(l; \eta) = \frac{e^{-\eta} \eta^l}{l!}; \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.10})$$

### III.3 Distribusi dari JALNK

Perhatikan kembali teori yang berkaitan dengan JALNK yang dibahas dalam Subbab III.2 di atas. Mehta dkk. (2007) telah menunjukkan bahwa distribusi dari  $Z_N|N$  dapat didekati oleh distribusi lognormal univariat. Parameter-parameter dari distribusi lognormal univariat tersebut diperoleh dengan jalan menyamakan fungsi pembangkit momen (*moment generating function*) atau disingkat FPM, dari distribusi tersebut dengan distribusi dari  $Z_N|N$ .

Misalkan  $\mu_{Z_l}$  dan  $\sigma_{Z_l}^2$  menyatakan parameter-parameter dari distribusi  $Z_l$  (atau  $Z_N|N = l$ ). Parameter-parameter tersebut dapat diperoleh secara numerik dengan menggunakan dua persamaan berikut

$$\tilde{\Psi}_{Z_l}(t_i; \mu_{Z_l}, \sigma_{Z_l}^2) = \tilde{\Psi}_{\sum_{i=1}^l X_i}^{(c)}(t_i; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{C}); \quad i = 1, 2, \quad (\text{III.11})$$

dengan

$$\tilde{\Psi}_{Z_l}(t_i; \mu_{Z_l}, \sigma_{Z_l}^2) = \sum_{k=1}^M \frac{w_k}{\sqrt{\pi}} \exp[-t_i \exp(\sqrt{2}\sigma_{Z_l} a_k + \mu_{Z_l})], \quad (\text{III.12})$$

dan

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\sum_{i=1}^l X_i}^{(c)}(t_i; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{C}) \\ = \sum_{k_1=1}^M \cdots \sum_{k_l=1}^M \left[ \prod_{t=1}^l \frac{w_{k_t}}{\sqrt{\pi}} \right] \exp \left[ -t_i \sum_{t=1}^l \left[ \exp \left( \sqrt{2} \sum_{j=1}^l c_{tj} a_{k_j} + \theta_t \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Persamaan (III.12) dan (III.13) masing-masing merupakan aproksimasi FPM dengan menggunakan ekspansi Gauss-Hermite untuk bilangan riil  $t_i$  bagi  $Z_l$  dan  $\sum_{i=1}^l X_i$ ,  $M$  menyatakan orde dari integrasi Hermite. Nilai  $M = 12$  cukup akurat untuk kasus  $X_1, \dots, X_l$  berkorelasi (Mehta dkk., 2007). Bobot,  $w_k$ , dan absis,  $a_k$ , untuk  $M$  sampai 20 telah ditabelkan dalam Abramowitz dan Stegun (1972). Komponen  $c_{tj}$  menyatakan elemen ke- $(t, j)$  dari matriks  $\mathbf{C}$ , dengan  $\mathbf{C}$  adalah akar kuadrat dari matriks  $\boldsymbol{\Lambda}$ , yaitu,  $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$ . Dalam Persamaan (III.12) dan (III.13) tidak ada *constant scale*,  $\xi$ , seperti dalam Mehta dkk. (2007) karena dalam disertasi ini distribusi lognormal yang digunakan tanpa *constant scale*.

Fungsi distribusi kumulatif dari JALNK diberikan oleh

$$\begin{aligned} F_{\text{JALNK}}(z) &= P(Z_N \leq z) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P(Z_N \leq z | N = l) p_N(l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} F_{Z_l}(z) p_N(l), \end{aligned}$$

dengan

$$F_{Z_0}(z) = \begin{cases} 0 & ; z < 0, \\ 1 & ; z \geq 0. \end{cases}$$

Dengan menggunakan hasil dari Mehta dkk. (2007),  $F_{Z_l}(z)$ , untuk  $l = 1, 2, \dots$ , dapat diaproksimasi oleh

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{Z_l}(z) &= \int_0^z \tilde{f}_{Z_l}(y) dy \\ &= \int_0^z \frac{1}{y\sigma_{Z_l}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu_{Z_l}}{\sigma_{Z_l}}\right)^2\right] dy \\ &= \Phi\left(\frac{\ln z - \mu_{Z_l}}{\sigma_{Z_l}}\right), \quad l = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

notasi  $\Phi(t)$  menyatakan fungsi distribusi kumulatif normal baku yang dievaluasi pada  $t$ . Dengan demikian aproksimasi fungsi distribusi kumulatif dari JALNK adalah

$$\tilde{F}_{\text{JALNK}}(z) = \begin{cases} 0 & ; z < 0, \\ p_N(0) & ; z = 0, \\ p_N(0) + \sum_{l=1}^{\infty} p_N(l) \Phi\left(\frac{\ln z - \mu_{Z_l}}{\sigma_{Z_l}}\right) & ; z > 0. \end{cases}$$

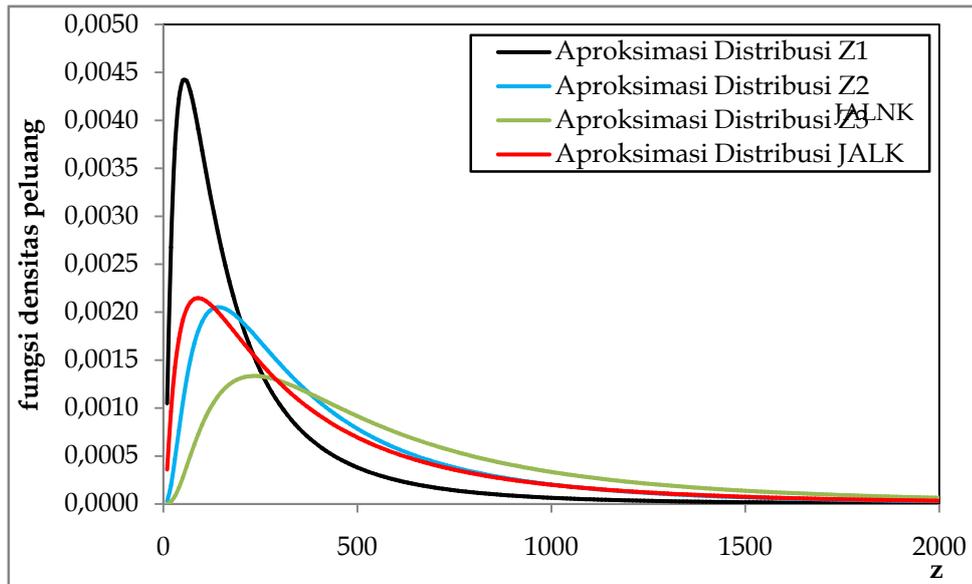
Sedangkan aproksimasi fungsi densitas peluang dari JALNK diberikan oleh

$$\tilde{f}_{\text{JALNK}}(z) = \begin{cases} p_N(0) & ; z = 0, \\ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{p_N(l)}{z\sigma_{Z_l}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln z - \mu_{Z_l}}{\sigma_{Z_l}}\right)^2\right] & ; z > 0. \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

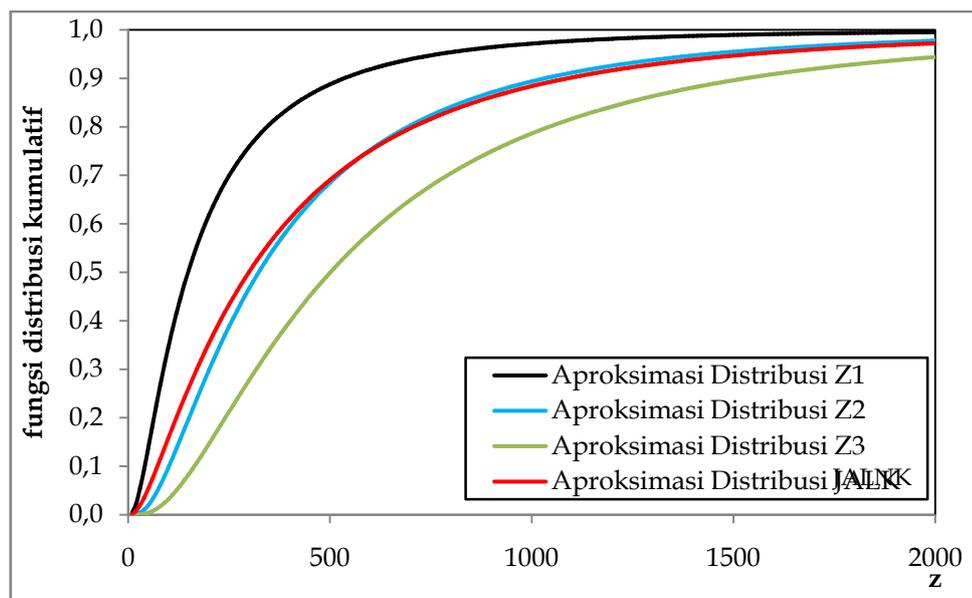
Jika  $N$  pada Persamaan (III.14) konstan, dan  $N > 0$ , maka aproksimasi distribusi yang dihasilkan adalah lognormal univariat (hasil dari Mehta dkk., 2007). Misalkan  $\tilde{\pi}_p$  menyatakan aproksimasi persentil ke  $100p$ ,  $0 < p < 1$ , dari JALNK,

maka  $\tilde{F}_{JALNK}(\tilde{\pi}_p) = p$ . Oleh karena itu  $\tilde{\pi}_p = 0$  untuk  $p \leq p_N(0)$ , sedangkan untuk  $p > p_N(0)$ ,  $\tilde{\pi}_p$  adalah solusi unik dari persamaan berikut

$$\sum_{l=1}^{\infty} p_N(l) \Phi\left(\frac{\ln \tilde{\pi}_p - \mu_{Z_l}}{\sigma_{Z_l}}\right) = p - p_N(0),$$



Gambar III.1. Kurva aproksimasi fungsi densitas peluang



Gambar III.2. Kurva aproksimasi fungsi distribusi kumulatif

Gambar III.1 dan III.2 menampilkan aproksimasi distribusi dari JALNK dengan  $N$  berdistribusi seragam diskrit,  $DU(1,3)$ , dan  $X_1, \dots, X_N$  diberikan  $N$  berdistribusi lognormal multivariat dengan parameter-parameter  $\theta_i = 5$ ,  $\lambda_{i,i} = 1$ , dan  $\lambda_{i,j} = 0,62$ , untuk  $i \neq j = 1, 2, \dots$ . Dengan parameter-parameter tersebut akan diperoleh parameter-parameter  $\mu_{Z_1} = 5$ ,  $\mu_{Z_2} = 5,7793$ ,  $\mu_{Z_3} = 6,217$ , dan  $\sigma_{Z_1} = 1$ ,  $\sigma_{Z_2} = 0,9052$ ,  $\sigma_{Z_3} = 0,8704$ . Empat aproksimasi distribusi ditampilkan dalam Gambar III.1 dan III.2, yaitu aproksimasi distribusi untuk  $Z_1, Z_2, Z_3$ , dan JALNK.

Aproksimasi mean dari JALNK diberikan oleh

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{\text{JALNK}} &= E[Z_N] = \int_0^{\infty} z f_{Z_N}(z) dz \\
&\approx 0 p_N(0) + \int_0^{\infty} z \sum_{l=1}^{\infty} \frac{p_N(l)}{z \sigma_{Z_l} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln z - \mu_{Z_l}}{\sigma_{Z_l}} \right)^2 \right] dz \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} p_N(l) \int_0^{\infty} \frac{z}{z \sigma_{Z_l} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln z - \mu_{Z_l}}{\sigma_{Z_l}} \right)^2 \right] dz \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} p_N(l) \exp \left( \mu_{Z_l} + \frac{\sigma_{Z_l}^2}{2} \right). \tag{III.15}
\end{aligned}$$

Aproksimasi variansi dari JALNK diberikan oleh

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{\text{JALNK}} &= \text{Var}[Z_N] = E[Z_N^2] - (E[Z_N])^2 \\
&\approx \int_0^{\infty} z^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{p_N(l)}{z \sigma_{Z_l} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log z - \mu_{Z_l}}{\sigma_{Z_l}} \right)^2 \right] dz - \tilde{E}_{\text{JALNK}}^2 \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} p_N(l) \int_0^{\infty} \frac{z^2}{z \sigma_{Z_l} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log z - \mu_{Z_l}}{\sigma_{Z_l}} \right)^2 \right] dz - \tilde{E}_{\text{JALNK}}^2 \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} p_N(l) \exp(2\mu_{Z_l} + 2\sigma_{Z_l}^2) - \tilde{E}_{\text{JALNK}}^2. \tag{III.16}
\end{aligned}$$

### III.4 Metode Penaksiran

Subbab ini membahas beberapa usulan metode penaksiran untuk model JAK dan JALNK yang dibahas dalam subbab-subbab sebelumnya. Pertama kali dibahas usulan dua metode untuk menaksir parameter distribusi eksak dari JALNK. Kemudian dua metode diusulkan untuk menaksir mean dan variansi dari JAK. Selanjutnya suatu metode diusulkan untuk menaksir parameter-parameter dari aproksimasi distribusi dari JALNK, yang hasilnya dapat digunakan untuk menaksir aproksimasi fungsi densitas dan fungsi distribusi kumulatif dari JALNK serta karakteristik dari distribusi tersebut, yaitu persentil, mean dan variansinya.

Misalkan  $Z_{N_{1,1}}, Z_{N_{2,2}}, \dots, Z_{N_{m,m}}$  merupakan suatu sampel acak berukuran  $m$  dari JAK yang realisasinya adalah  $z_{n_{1,1}}, z_{n_{2,2}}, \dots, z_{n_{m,m}}$ , dengan  $z_{n_k,k}$  menyatakan pengamatan ke- $k$  dari JAK,  $n_k$  menyatakan banyaknya  $X$  untuk pengamatan ke- $k$ . JAK dapat ditulis sebagai jumlah dari  $X_j$ , yaitu

$$Z_{N_k,k} = X_{1,k} + \dots + X_{N_k,k}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Struktur data untuk realisasi dari JAK ditampilkan dalam Tabel III.1.

Tabel III.1. Struktur data dari JAK

No.	Realisasi dari $X_j$	Realisasi dari JAK
1	$x_{1,1}, \dots, x_{n_{1,1}}$	$z_{n_{1,1}} (= x_{1,1} + \dots + x_{n_{1,1}})$
2	$x_{1,2}, \dots, x_{n_{2,2}}$	$z_{n_{2,2}} (= x_{1,2} + \dots + x_{n_{2,2}})$
⋮	⋮	⋮
$m - 1$	$x_{1,m-1}, \dots, x_{n_{m-1,m-1}}$	$z_{n_{m-1,m-1}} (= x_{1,m-1} + \dots + x_{n_{m-1,m-1}})$
$m$	$x_{1,m}, \dots, x_{n_{m,m}}$	$z_{n_{m,m}} (= x_{1,m} + \dots + x_{n_{m,m}})$

### III.4.1 Penaksiran Parameter Distribusi Eksak dari JALNK

Dalam bagian ini akan dibahas usulan dua metode untuk menaksir parameter-parameter distribusi eksak dari JALNK. Metode pertama menggunakan penaksiran likelihood maksimum (*maximum likelihood estimation*) terpisah yang selanjutnya akan disebut MLMP. Sedangkan metode kedua menggunakan metode momen diperumum (*generalized moment method*) yang selanjutnya akan disebut MMU. Walaupun bentuk distribusi eksak dari JALNK tidak diketahui, namun parameter-parameter distribusinya dapat ditaksir oleh kedua metode di atas.

Metode penaksiran pertama didasarkan pada asumsi bahwa distribusi dari  $X_1, \dots, X_N$  diberikan  $N = n$  adalah bebas dari  $n$ . Dengan demikian taksiran parameter distribusi eksak dari JALNK dapat diperoleh dengan cara, pertama menaksir parameter distribusi  $N$ , kedua menaksir parameter distribusi dari  $X_1, \dots, X_N$  diberikan  $N = n$ , dimana keduanya dilakukan secara terpisah. Taksiran parameter-parameter melalui MLMP untuk distribusi dari  $X_1, \dots, X_N$  diberikan  $N = n$  adalah

$$\hat{\theta}_j = \frac{1}{r_j} \sum_{t \in B_j} \ln X_{j,t}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{III.17})$$

dan

$$\hat{\lambda}_{k,j} = \frac{1}{r_j} \sum_{t \in B_j} (\ln X_{k,t} - \hat{\theta}_k)(\ln X_{j,t} - \hat{\theta}_j), \quad j, k = 1, 2, \dots, n; k \leq j, \quad (\text{III.18})$$

dengan  $B_j = \{r: r \text{ adalah nomor pengamatan dari } X_j\}$ ,  $B_j \subseteq A = \{1, 2, \dots, m\}$ , dan  $r_j$  adalah jumlah pengamatan dari  $X_j$ . Persamaan (III.17) merupakan penaksir yang tak-bias, sedangkan Persamaan (III.18) sifatnya bias. Persamaan (III.18) akan bersifat tak-bias apabila penyebutnya,  $r_j$ , diganti oleh  $r_j - 1$ .

Jika  $N$  berdistribusi binomial atau Poisson dengan fungsi massa peluang seperti Persamaan (III.9) atau (III.10), maka taksiran parameter  $p$  dan  $\eta$  dengan

menggunakan metode maksimum likelihood masing-masing adalah  $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^m N_i}{ms}$ , dan  $\hat{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^m N_i}{m}$ . Keduanya merupakan penaksir yang tak-bias.

Metode penaksiran kedua untuk parameter distribusi eksak dari JALNK menggunakan MMU yang pertama kali diperkenalkan oleh Hansen (1982). Metode MMU merupakan perluasan langsung dari metode momen (*moment method*) yang selanjutnya akan disingkat MM. Metode MMU tidak mensyaratkan untuk mengetahui distribusi dari data, cukup mengetahui beberapa momen yang dibutuhkan dari distribusi tersebut. Penaksir dengan menggunakan MMU mempunyai sifat konsisten, efisien, dan berdistribusi normal asimtotik (Nielsen, 2005). Penjelasan yang lebih rinci mengenai MMU dapat dilihat dalam Hansen (1982), Hansen dkk. (1996), Nielsen (2005).

Untuk mendapatkan taksiran parameter distribusi eksak dari JALNK menggunakan MMU diperlukan syarat-syarat momen (*moment conditions*). Syarat-syarat momen adalah suatu pernyataan yang melibatkan data dan parameter, yaitu

$$g(\boldsymbol{\phi}) = E[\mathbf{h}(Z_{N_k,k}, \boldsymbol{\phi})] = \mathbf{0}.$$

dengan  $\boldsymbol{\phi}$  adalah vektor parameter distribusi eksak dari JALNK berdimensi  $K$  (terhingga), dan  $\mathbf{h}(Z_{N_k,k}, \boldsymbol{\phi})$  vektor fungsi dari  $\boldsymbol{\phi}$  dan  $Z_{N_k,k}$  berdimensi  $R$  dengan  $R \geq K$ . Untuk kasus distribusi *compound* binomial-lognormal berkorelasi,  $K = 1 + \frac{s(s+3)}{2}$ . Sedangkan untuk kasus distribusi *compound* Poisson-lognormal berkorelasi secara umum taksiran parameteranya tidak dapat dicari karena  $K$  tak terhingga. Jika  $R = K$ , maka penaksir parameteranya dikenal sebagai penaksir MM. Sedangkan jika  $R > K$ , maka penaksir parameteranya dikenal sebagai penaksir MMU.

Untuk suatu himpunan pengamatan,  $z_{N_k,k}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), penaksir MMU,  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ , dapat diturunkan sebagai solusi dari persamaan-persamaan berikut

$$g_m(\boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mathbf{h}(z_{N_k,k}, \boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}. \quad (\text{III.19})$$

Dalam disertasi ini, vektor fungsi dalam Persamaan (III.19) adalah

$$\mathbf{h}(z_{N_k,k}, \boldsymbol{\phi}) = \left( z_{N_k,k} - E(Z_N), z_{N_k,k}^2 - E(Z_N^2), \dots, z_{N_k,k}^R - E(Z_N^R) \right)^T,$$

dengan

$$E(Z_N^r) = E(X_1^r) p_N(1) + E(X_1 + X_2)^r p_N(2) + \dots \\ + E(X_1 + X_2 + \dots + X_t)^r p_N(t), \quad t = 2, 3, \dots, r = 1, 2, \dots,$$

sedangkan  $t$  menyatakan nilai maksimum dalam ruang sampel dari peubah acak  $N$ , dan

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_t)^r = \sum_{k_1=0}^r \sum_{k_2=0}^{r-k_1} \dots \sum_{k_{t-1}=0}^{r-k_1-\dots-k_{t-2}} \frac{r! E(X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_t^{r-k_1-\dots-k_{t-1}})}{k_1! k_2! \dots (r-k_1-\dots-k_{t-1})!} \\ = \sum_{k_1=0}^r \sum_{k_2=0}^{r-k_1} \dots \sum_{k_{t-1}=0}^{r-k_1-\dots-k_{t-2}} \frac{r! \exp\left(\mathbf{u}^T \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{u}\right)}{k_1! k_2! \dots (r-k_1-\dots-k_{t-1})!}$$

dengan  $\mathbf{u} = (k_1, k_2, \dots, r - k_1 - \dots - k_{t-1})^T$ . Untuk kasus MMU, banyaknya persamaan dalam Persamaan (III.19) lebih dari banyaknya parameter, sehingga secara umum tidak ada solusi untuk  $g_m(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}$ . Penaksir MMU untuk parameter-parameter distribusi eksak dari JALNK dapat dicari dengan meminimumkan jumlah kuadrat diboboti yang didefinisikan oleh

$$Q_m(\boldsymbol{\phi}) = g_m(\boldsymbol{\phi})^T W_m g_m(\boldsymbol{\phi}), \quad (\text{III.20})$$

dengan  $W_m$  merupakan matriks bobot simetri dan definit positif yang merupakan bobot untuk setiap momen. Penaksir MMU tergantung pada pilihan matriks bobot, yaitu

$$\hat{\phi}_{MMU}(W_m) = \arg \min_{\phi} \{g_m(\phi)^T W_m g_m(\phi)\}.$$

Dalam literatur disebutkan bahwa penaksir MMU merupakan penaksir yang konsisten dan berdistribusi normal asimtotik. Penaksir MMU akan menjadi penaksir yang efisien apabila matriks bobotnya optimal, yaitu  $W_m^{opt} = S^{-1}$ , dimana  $S$  merupakan variansi asimtotik dari  $\sqrt{m}g_m(\phi)$ . Penaksir yang konsisten untuk  $S$  adalah

$$S_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mathbf{h}(z_{N_k, k}, \phi) \mathbf{h}(z_{N_k, k}, \phi)^T.$$

Dalam literatur, misalnya Hansen dkk. (1996) dan Nielsen (2005), ada 3 usulan penaksir MMU, yaitu penaksir MMU dua-tahap, penaksir MMU iteratif, dan penaksir MMU diperbarui kontinu. Untuk memperoleh penaksir MMU dua-tahap, perlu dipilih matriks bobot awal, misalnya matriks identitas,  $W_{[1]} = I_R$ , kemudian mencari suatu penaksir MMU tahap pertama yang konsisten tetapi tidak efisien, yaitu

$$\hat{\phi}_{[1]} = \arg \min_{\phi} \{g_m(\phi)^T W_{[1]} g_m(\phi)\}.$$

Selanjutnya menghitung matriks bobot optimal,  $W_{[2]}^{opt}$ , berdasarkan  $\hat{\phi}_{[1]}$ . Penaksir MMU dua-tahap adalah

$$\hat{\phi}_{[2]} = \arg \min_{\phi} \{g_m(\phi)^T W_{[2]}^{opt} g_m(\phi)\}.$$

Perlu dicatat bahwa penaksir MMU dua-tahap tidak unik yang tergantung pada pilihan matriks bobot awal,  $W_{[1]}$ .

Penaksir MMU iteratif dapat diperoleh dengan melanjutkan iterasi hasil penaksir MMU dua-tahap, yaitu menaksir ulang matriks bobot optimal,  $W_{[3]}^{opt}$ , berdasarkan  $\hat{\phi}_{[2]}$ , kemudian mencari  $\hat{\phi}_{[3]}$ . Perhitungan  $W_{[j]}^{opt}$ , dan  $\hat{\phi}_{[j]}$ , dilakukan

terus-menerus sampai konvergen, yaitu taksiran parameter tidak berubah dari satu iterasi ke iterasi berikutnya. Penaksir MMU iteratif tidak tergantung pada pilihan matriks bobot awal,  $W_{[1]}$ .

Penaksir MMU diperbarui kontinu adalah  $\phi$  yang meminimumkan

$$Q_m(\phi) = g_m(\phi)^T W_m(\phi) g_m(\phi).$$

Penaksir MMU dan jumlah kuadrat diboboti pada Persamaan (III.20) dapat digunakan untuk menguji kecocokan distribusi dari JALNK. Statistik ujinya adalah

$$\xi_J = m \cdot g_m(\hat{\Phi}_{MMU})^T W_m^{opt} g_m(\hat{\Phi}_{MMU}),$$

yang mengikuti distribusi  $\chi^2$  dengan derajat bebas  $R - K$ . Uji ini dikenal sebagai uji J atau uji Hansen.

### III.4.2 Penaksiran Mean dan Variansi dari JALNK

Tiga pendekatan akan diusulkan untuk menaksir mean dan variansi dari JALNK. Dua pendekatan akan dibahas dalam bagian ini, sedangkan pendekatan yang ketiga akan dibahas dalam Bagian III.4.3.

Pendekatan pertama dibangun dengan menggunakan prinsip penaksiran metode momen, yaitu menyamakan momen-momen teoritik dari JALNK dengan momen-momen empirik dari JALNK (Mutaqin dkk., 2010b). Pendekatan momen ini sifatnya bukan parametrik dan konsisten. Dengan demikian, mean dan variansi dari JALNK masing-masing ditaksir oleh rataan dan variansi empirik dari JALNK. Berdasarkan pendekatan ini, penaksir untuk mean dari JALNK adalah

$$E_1 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Z_{N_k, k}, \quad (\text{III.21})$$

dan penaksir untuk variansi dari JALNK adalah

$$V_1 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (Z_{N_k,k} - E_1)^2. \quad (\text{III.22})$$

Pendekatan kedua sifatnya parametrik yang dibangun dengan prinsip *plug-in* dan memanfaatkan penaksir likelihood maksimum (*maximum likelihood estimators*) yang selanjutnya akan disingkat PLM dari distribusi lognormal multivariat dan parameter dari distribusi  $N$ .

Misalkan  $\hat{\theta}_j$  dan  $\hat{\lambda}_{k,j}$ ,  $j, k = 1, 2, \dots$ , merupakan penaksir tak-bias dari parameter-parameter distribusi lognormal multivariat, yaitu

$$\hat{\theta}_j = \frac{1}{r_j} \sum_{t \in B_j} \ln X_{j,t}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (\text{III.23})$$

dan

$$\hat{\lambda}_{k,j} = \frac{1}{r_j - 1} \sum_{t \in B_j} (\ln X_{k,t} - \hat{\theta}_k)(\ln X_{j,t} - \hat{\theta}_j), \quad j, k = 1, 2, \dots, k \leq j \quad (\text{III.24})$$

Finney (1941) telah menurunkan penaksir tak-bias bervariansi minimum seragam (*uniformly minimum variance unbiased estimator*) dari mean dan variansi dari distribusi lognormal. Berdasarkan pada hasil tersebut, penaksir dari  $E[X_j]$ , dan  $Var[X_j]$  adalah

$$\hat{E}[X_j] = \hat{\mu}_j = \exp(\hat{\theta}_j) g\left(\frac{1}{2} \hat{\lambda}_{j,j}\right), \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\widehat{Var}[X_j] = \hat{\sigma}_{j,j}^2 = \exp(2\hat{\theta}_j) \left\{ g(2\hat{\lambda}_{j,j}) - g\left(\frac{r_j - 2}{r_j - 1} \hat{\lambda}_{j,j}\right) \right\}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

dengan  $Cov[X_i, X_j]$ ,  $i \neq j$ , ditaksir oleh

$$\widehat{Cov}[X_i, X_j] = \hat{\sigma}_{i,j}^2 = \exp \left\{ (\hat{\theta}_i + \hat{\theta}_j) + \frac{(\hat{\lambda}_{i,i} + \hat{\lambda}_{j,j})}{2} \right\} \{ \exp(\hat{\lambda}_{i,j}) - 1 \},$$

$$i, j = 1, 2, \dots,$$

dan  $g(t)$  adalah deret tak terhingga, yaitu

$$g(t) = 1 + \frac{r_j - 1}{r_j} t + \frac{(r_j - 1)^3}{r_j^2 2!} \frac{t^2}{r_j + 1} + \frac{(r_j - 1)^5}{r_j^3 3!} \frac{t^3}{(r_j + 1)(r_j + 3)} + \dots$$

Dengan menggunakan prinsip *plug-in*, penaksir parametrik yang diusulkan untuk mean dan variansi dari JALNK masing-masing adalah

$$E_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \hat{p}_N(l) \sum_{i=1}^l \hat{\mu}_i, \quad (\text{III.25})$$

dan

$$V_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \hat{p}_N(l) \sum_{i=1}^l \hat{\sigma}_{i,i}^2 + 2 \sum_{l=2}^{\infty} \hat{p}_N(l) \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j>i}^l \hat{\sigma}_{i,j}^2$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \hat{p}_N(l) \left\{ \sum_{i=1}^l \hat{\mu}_i - \hat{E}_{\text{JALNK}} \right\}^2, \quad (\text{III.26})$$

dengan  $\hat{p}_N(l)$  menyatakan penaksir untuk fungsi massa peluang bagi  $N$ .

Untuk kasus  $N$  berdistribusi binomial atau Poisson, misalkan  $f_1(l; s, \hat{p})$  dan  $f_2(l; \hat{\eta})$  masing-masing menyatakan penaksir bagi fungsi massa peluang untuk distribusi binomial dan Poisson dengan menggunakan prinsip *plug-in*, dengan  $\hat{p}$  dan  $\hat{\eta}$  masing-masing menyatakan PLM untuk parameter  $p$  dan  $\eta$ . Penaksir fungsi massa peluang di atas masing-masing adalah

$$f_1(l; s, \hat{p}) = \binom{s}{l} \hat{p}^l (1 - \hat{p})^{s-l}; \quad l = 0, 1, \dots, s, \quad (\text{III.27})$$

dan

$$f_2(l; \hat{\eta}) = \frac{e^{-\hat{\eta}} \hat{\eta}^l}{l!}; \quad l = 0, 1, \dots, \quad (\text{III.28})$$

dengan  $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^m N_i}{ms}$ , dan  $\hat{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^m N_i}{m}$ .

Dengan demikian penaksir yang diusulkan untuk mean dan variansi dari distribusi *compound* binomial-lognormal berkorelasi dan distribusi *compound* Poisson-lognormal berkorelasi adalah seperti pada Persamaan (III.25) dan (III.26) dengan mengganti  $\hat{p}_N(l)$  masing-masing oleh Persamaan (III.27) dan (III.28).

Dengan menggunakan sifat-sifat dari PLM, mudah untuk ditunjukkan bahwa  $f_1(l; s, \hat{p})$  dan  $f_2(l; \hat{\eta})$  masing-masing merupakan penaksir tak-bias asimtotik (*asymptotically unbiased estimators*) bagi fungsi massa peluang binomial dan Poisson. Akibatnya adalah taksiran mean dari distribusi *compound* binomial-lognormal berkorelasi dan distribusi *compound* Poisson-lognormal berkorelasi merupakan penaksir yang tak-bias asimtotik.

### III.4.3 Penaksiran Parameter dan Karakteristik dari Aproksimasi

#### Distribusi JALNK

Dalam bagian ini akan dibahas usulan metode penaksiran parameter dari aproksimasi distribusi JALNK. Hasil penaksirannya akan digunakan untuk menaksir aproksimasi distribusi JALNK baik fungsi massa peluangnya ataupun fungsi distribusi kumulatifnya serta untuk menaksir persentil, mean dan variansinya.

Misalkan  $\hat{p}_N(l)$ ,  $\hat{\mu}_{Z_l}$  dan  $\hat{\sigma}_{Z_l}^2$ ,  $l = 1, \dots, n$ , masing-masing merupakan penaksir dari distribusi untuk peubah acak  $N$  dan penaksir parameter-parameter dari aproksimasi distribusi JALNK yang fungsi densitasnya ada pada Persamaan (III.14). Sampel acak  $N_1, N_2, \dots, N_m$  digunakan untuk menghitung  $\hat{p}_N(l)$ , sedangkan  $\hat{\mu}_{Z_l}$  dan  $\hat{\sigma}_{Z_l}^2$  dihitung dengan menggunakan sampel acak dari JALNK. Jika peubah acak  $N$  berdistribusi binomial dengan parameter  $(s; p)$  atau Poisson

dengan parameter  $\eta$ , maka  $\hat{p}_N(l)$  dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan (III.27) untuk kasus binomial, atau Persamaan (III.28) untuk kasus Poisson. Sedangkan  $\hat{\mu}_{Z_l}$  dan  $\hat{\sigma}_{Z_l}^2$ ,  $l = 1, \dots, n$ , dihitung dengan tahapan sebagai berikut:

1. Hitung penaksir tak-bias dari parameter-parameter distribusi lognormal multivariat,  $\hat{\theta}_j$  dan  $\hat{\lambda}_{k,j}$ ,  $j, k = 1, \dots, l$ , dengan menggunakan Persamaan (III.23) dan (III.24).
2. Bentuk vektor taksiran parameter  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_l)^T$ , dan matriks taksiran parameter  $\hat{\boldsymbol{\Lambda}} = (\hat{\lambda}_{k,j})$ .
3. Hitung  $\hat{\mathbf{C}}$ , yaitu akar kuadrat dari matriks  $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}$ , dengan  $\hat{\boldsymbol{\Lambda}} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}^T$ .
4. Hitung  $\tilde{\Psi}_{\sum_{j=1}^l X_j}^{(c)}(t_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{C}})$ , untuk  $i = 1, 2$ , menggunakan Persamaan (III.13).
5. Hitung  $\hat{\mu}_{Z_l}$  dan  $\hat{\sigma}_{Z_l}^2$ , yang merupakan solusi dari dua Persamaan (III.11), dengan ruas kanannya diganti oleh nilai  $\tilde{\Psi}_{\sum_{j=1}^l X_j}^{(c)}(t_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{C}})$ , untuk  $i = 1, 2$ , yang telah dihitung pada Langkah 4 di atas.

Berdasarkan nilai-nilai  $\hat{p}_N(l)$ ,  $\hat{\mu}_{Z_l}$  dan  $\hat{\sigma}_{Z_l}^2$ ,  $l = 1, \dots, n$ , maka akan didapatkan taksiran aproksimasi distribusi dari JALNK, persentil, mean dan variansinya. Taksiran aproksimasi fungsi densitas peluang dari JALNK adalah

$$\hat{f}_{\text{JALNK}}(z) = \begin{cases} \hat{p}_N(0) & ; z = 0, \\ \sum_{l=1}^n \frac{\hat{p}_N(l)}{z \hat{\sigma}_{Z_l} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln z - \hat{\mu}_{Z_l}}{\hat{\sigma}_{Z_l}} \right)^2 \right] & ; z > 0. \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

Taksiran aproksimasi fungsi distribusi kumulatif dari JALNK adalah

$$\hat{F}_{\text{JALNK}}(z) = \begin{cases} 0 & ; z < 0, \\ \hat{p}_N(0) & ; z = 0, \\ \hat{p}_N(0) + \sum_{l=1}^n \hat{p}_N(l) \Phi \left( \frac{\ln z - \hat{\mu}_{Z_l}}{\hat{\sigma}_{Z_l}} \right) & ; z > 0. \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

Taksiran aproksimasi persentil ke  $100p$ , dari JALNK, adalah  $\hat{\pi}_p = 0$  untuk  $p \leq \hat{p}_N(0)$ , atau  $\hat{\pi}_p$  adalah solusi unik dari persamaan berikut

$$\sum_{l=1}^n \hat{p}_N(l) \Phi\left(\frac{\ln \hat{\pi}_p - \hat{\mu}_{Z_l}}{\hat{\sigma}_{Z_l}}\right) = p - \hat{p}_N(0),$$

untuk  $p > \hat{p}_N(0)$ .

Dengan menggunakan prinsip *plug-in*, taksiran aproksimasi mean dan variansi dari JALNK masing-masing adalah

$$E_3 = \sum_{l=1}^n \hat{p}_N(l) \exp\left(\hat{\mu}_{Z_l} + \frac{\hat{\sigma}_{Z_l}^2}{2}\right), \quad (\text{III.31})$$

dan

$$V_3 = \sum_{l=1}^n \hat{p}_N(l) \exp(2\hat{\mu}_{Z_l} + 2\hat{\sigma}_{Z_l}^2) - E_3^2. \quad (\text{III.32})$$

### III.5 Studi dan Hasil Simulasi

Dalam bagian sebelumnya telah dibahas dua metode penaksiran parameter dari distribusi eksak JALNK dan tiga metode penaksiran mean dan variansi dari JALNK. Kedua metode penaksiran parameter tersebut adalah MLMP dan MMU. Sedangkan ketiga metode penaksiran mean dan variansi dari JALNK adalah pertama menggunakan prinsip penaksiran metode momen (MM); kedua metode bersifat parametrik yang dibangun dengan prinsip *plug-in* dan memanfaatkan PLM dari distribusi lognormal multivariat dan parameter dari distribusi  $N$  (MP1); ketiga metode bersifat parametrik dengan menggunakan prinsip *plug-in* dari taksiran aproksimasi mean dari JALNK (MP2).

Dalam bagian ini, kinerja dari metode penaksiran parameter, mean dan variansi dari JALNK akan dibandingkan dengan menggunakan simulasi Monte Carlo untuk berbagai kondisi distribusi dari  $N$  dan  $X_1, \dots, X_l$ , serta berbagai ukuran sampel. Selain itu akan diperiksa juga kinerja dari taksiran aproksimasi distribusi dan persentil dari JALNK.

### III.5.1 Evaluasi Metode Penaksiran Parameter Distribusi Eksak JALNK

Dalam bagian ini dua metode penaksiran parameter distribusi eksak dari JALNK yang dibahas dalam Subbab III.4.1 akan dievaluasi kinerjanya menggunakan simulasi Monte Carlo. Kedua metode tersebut adalah MLMP dan MMU. Evaluasi akan didasarkan pada bias, rataan kesalahan kuadrat (*mean squared error*) atau disingkat RKK dan konsistensi berdasarkan sampel yang disimulasikan. Tahapan simulasinya adalah sebagai berikut:

1. Bangkitkan  $N$  dari distribusi peubah acak diskrit.
2. Bangkitkan  $X_1, \dots, X_N$  dari distribusi lognormal multivariat.
3. Hitung JALNK,  $Z_N = X_1 + \dots + X_N$ .
4. Ulangi Langkah 1 sampai 3 sebanyak  $m$  kali.
5. Hitung penaksir parameter distribusi eksak dari JALNK menggunakan kedua metode berdasarkan  $m$  pengamatan yang dibangkitkan.
6. Ulangi Langkah 1 sampai 5 sebanyak 200 kali.
7. Hitung bias, RKK dan ukuran konsistensi kedua penaksir parameter distribusi eksak dari JALNK.

Distribusi yang dipertimbangkan dalam simulasi untuk peubah acak  $N$ , adalah binomial,  $\text{bin}(3;0,5)$ , dan seragam diskrit,  $\text{DU}(1,3)$ . Parameter-parameter dari distribusi lognormal multivariat adalah  $\theta_i = \theta = 1$ ,  $\lambda_{i,i} = 1$ , dan  $\rho_{i,j} = \rho = 0,5$ , untuk  $i, j = 1, \dots, l$ ,  $i \neq j$ . Sementara itu, ukuran sampel yang akan dicobakan adalah,  $m = 10, 30, 50, 100, 500, 1.000$ . Pada kasus  $N$  berdistribusi  $\text{bin}(3;0,5)$ , jumlah parameter yang harus ditaksirnya ada 10. Sedangkan pada kasus  $N$  berdistribusi  $\text{DU}(1,3)$ , jumlah parameter yang harus ditaksirnya ada 9. Dalam disertasi ini, banyaknya momen yang dilibatkan untuk penaksiran menggunakan MMU adalah sebanyak parameter yang harus ditaksirnya ditambah satu. Jadi

untuk kasus  $N$  berdistribusi  $\text{bin}(3;0,5)$ , momen-momen yang dilibatkannya adalah momen ke-1 sampai dengan momen ke-11 dari JALNK. Sedangkan pada kasus  $N$  berdistribusi  $\text{DU}(1,3)$ , momen-momen yang dilibatkannya adalah momen ke-1 sampai dengan momen ke-10 dari JALNK.

Hasil simulasi pendahuluan (Lampiran A) menunjukkan bahwa dengan menggunakan nilai awal hasil dari penaksiran MLMP, hasil penaksiran MMU dua-tahap dan iteratif memiliki bias, RKK dan ukuran konsistensi yang lebih besar dibandingkan dengan hasil penaksiran MMU diperbarui kontinu. Sementara itu hasil penaksiran MLMP dan MMU diperbarui kontinu hasilnya tidak jauh berbeda. Dengan demikian untuk simulasi selanjutnya hanya akan dipertimbangkan metode penaksiran MLMP dan MMU diperbarui kontinu.

Tabel III.2 Bias dan RKK dari penaksir MLMP untuk  $N \sim \text{bin}(3;0,5)$

Penaksir	Banyaknya pengamatan ( $m$ )					
	10	30	50	100	500	1.000
$\hat{p}$	0,0050	0,0033	-0,0007	-0,0017	-0,0007	-0,0003
	[0,0078]	[0,0023]	[0,0017]	[0,0007]	[0,0002]	[0,0001]
$\hat{\theta}_1$	-0,0186	0,0048	0,0175	-0,0044	0,0031	0,0007
	[0,0980]	[0,0383]	[0,0287]	[0,0105]	[0,0023]	[0,0011]
$\hat{\theta}_2$	-0,0730	0,0024	0,0150	-0,0041	0,0010	0,0024
	[0,2154]	[0,0669]	[0,0414]	[0,0188]	[0,0042]	[0,0021]
$\hat{\theta}_3$	-0,0361	0,0640	0,0030	-0,0053	-0,0097	-0,0046
	[0,8452]	[0,3103]	[0,1913]	[0,0575]	[0,0163]	[0,0086]
$\hat{\lambda}_{1,1}$	0,0955	-0,0104	-0,0106	-0,0066	-0,0003	0,0003
	[0,3100]	[0,0777]	[0,0425]	[0,0227]	[0,0051]	[0,0021]
$\hat{\lambda}_{1,2}, \hat{\lambda}_{2,1}$	0,0465	0,0095	0,0014	-0,0005	0,0063	0,0016
	[0,5235]	[0,1046]	[0,0608]	[0,0275]	[0,0059]	[0,0026]
$\hat{\lambda}_{1,3}, \hat{\lambda}_{3,1}$	-0,3949	-0,0244	0,0363	-0,0122	0,0051	0,0027
	[0,4849]	[0,5088]	[0,5027]	[0,1141]	[0,0230]	[0,0095]
$\hat{\lambda}_{2,2}$	0,0291	0,0150	-0,0080	0,0088	0,0040	0,0003
	[0,7436]	[0,1500]	[0,0988]	[0,0381]	[0,0072]	[0,0039]
$\hat{\lambda}_{2,3}, \hat{\lambda}_{3,2}$	-0,4268	-0,0834	0,0274	0,0009	0,0138	0,0077
	[0,4797]	[0,4224]	[0,4189]	[0,1142]	[0,0215]	[0,0090]
$\hat{\lambda}_{3,3}$	-0,6076	-0,1139	0,0128	-0,0291	0,0131	-0,0007
	[1,1720]	[0,6943]	[0,5566]	[0,1563]	[0,0387]	[0,0141]

Tabel III.3 Bias dan RKK dari penaksir MMU diperbarui kontinu untuk  $N \sim \text{bin}(3;0,5)$

Penaksir	Banyaknya pengamatan ( $m$ )					
	10	30	50	100	500	1.000
$\hat{p}$	0,0073	0,0061	0,0020	0,0004	0,0015	0,0016
	[0,0079]	[0,0025]	[0,0018]	[0,0008]	[0,0002]	[0,0001]
$\hat{\theta}_1$	-0,0145	0,0100	0,0221	0,0005	0,0088	0,0060
	[0,0990]	[0,0392]	[0,0294]	[0,0108]	[0,0025]	[0,0014]
$\hat{\theta}_2$	-0,0704	0,0030	0,0181	-0,0020	0,0020	0,0032
	[0,2167]	[0,0675]	[0,0423]	[0,0192]	[0,0041]	[0,0023]
$\hat{\theta}_3$	-0,0332	0,0708	0,0085	-0,0018	-0,0042	0,0009
	[0,8473]	[0,3152]	[0,1952]	[0,0587]	[0,0167]	[0,0089]
$\hat{\lambda}_{1,1}$	0,1017	-0,0043	-0,0063	0,0000	0,0045	0,0065
	[0,3160]	[0,0791]	[0,0430]	[0,0238]	[0,0053]	[0,0024]
$\hat{\lambda}_{1,2}, \hat{\lambda}_{2,1}$	0,0504	0,0126	0,0049	0,0024	0,0099	0,0044
	[0,5294]	[0,1056]	[0,0614]	[0,0278]	[0,0061]	[0,0027]
$\hat{\lambda}_{1,3}, \hat{\lambda}_{3,1}$	-0,3930	-0,0220	0,0375	-0,0100	0,0075	0,0050
	[0,4885]	[0,5156]	[0,4975]	[0,1151]	[0,0231]	[0,0096]
$\hat{\lambda}_{2,2}$	0,0326	0,0198	-0,0025	0,0134	0,0081	0,0047
	[0,7456]	[0,1518]	[0,0997]	[0,0384]	[0,0075]	[0,0040]
$\hat{\lambda}_{2,3}, \hat{\lambda}_{3,2}$	-0,4269	-0,0821	0,0297	0,0041	0,0171	0,0111
	[0,4787]	[0,4228]	[0,4186]	[0,1152]	[0,0220]	[0,0093]
$\hat{\lambda}_{3,3}$	-0,6048	-0,1107	0,0173	-0,0242	0,0179	0,0049
	[1,1785]	[0,6976]	[0,5647]	[0,1562]	[0,0389]	[0,0145]

Tabel III.4 Bias dan RKK dari penaksir MLMP untuk  $N \sim \text{DU}(1,3)$

Penaksir	Banyaknya pengamatan ( $m$ )					
	10	30	50	100	500	1.000
$\hat{\theta}_1$	0,0047	0,0192	0,0055	0,0085	-0,0004	0,0058
	[0,1023]	[0,0313]	[0,0172]	[0,0091]	[0,0018]	[0,0012]
$\hat{\theta}_2$	0,0228	-0,0192	0,0003	0,0056	0,0030	0,0032
	[0,1554]	[0,0468]	[0,0272]	[0,0159]	[0,0027]	[0,0016]
$\hat{\theta}_3$	-0,0757	-0,0148	0,0139	0,0170	0,0035	0,0016
	[0,3615]	[0,0827]	[0,0600]	[0,0292]	[0,0062]	[0,0029]
$\hat{\lambda}_{1,1}$	0,0315	-0,0231	0,0005	-0,0087	-0,0032	-0,0023
	[0,2878]	[0,0722]	[0,0453]	[0,0185]	[0,0042]	[0,0018]
$\hat{\lambda}_{1,2}, \hat{\lambda}_{2,1}$	0,0315	-0,0044	0,0190	-0,0165	-0,0046	-0,0025
	[0,3468]	[0,0739]	[0,0458]	[0,0204]	[0,0038]	[0,0021]
$\hat{\lambda}_{1,3}, \hat{\lambda}_{3,1}$	-0,0742	0,0290	0,0023	-0,0070	0,0035	-0,0035
	[0,6033]	[0,1488]	[0,0924]	[0,0424]	[0,0075]	[0,0040]
$\hat{\lambda}_{2,2}$	-0,0022	0,0093	0,0061	-0,0154	-0,0017	-0,0009
	[0,5131]	[0,1231]	[0,0692]	[0,0321]	[0,0058]	[0,0037]
$\hat{\lambda}_{2,3}, \hat{\lambda}_{3,2}$	-0,0356	0,0513	-0,0128	0,0093	-0,0006	-0,0044
	[0,7892]	[0,1616]	[0,0911]	[0,0395]	[0,0066]	[0,0044]
$\hat{\lambda}_{3,3}$	-0,0970	0,0397	-0,0195	0,0208	-0,0023	-0,0035
	[1,0278]	[0,2174]	[0,1260]	[0,0645]	[0,0108]	[0,0060]

Tabel III.5 Bias dan RKK dari penaksir MMU diperbarui kontinu untuk  $N \sim DU(1,3)$

Penaksir	Banyaknya pengamatan ( $m$ )					
	10	30	50	100	500	1.000
$\hat{\theta}_1$	0,0098	0,0249	0,0083	0,0135	0,0053	0,0114
	[0,1038]	[0,0315]	[0,0179]	[0,0092]	[0,0020]	[0,0016]
$\hat{\theta}_2$	0,0266	-0,0138	0,0060	0,0087	0,0073	0,0084
	[0,1572]	[0,0477]	[0,0281]	[0,0164]	[0,0031]	[0,0018]
$\hat{\theta}_3$	-0,0713	-0,0101	0,0197	0,0217	0,0086	0,0065
	[0,3641]	[0,0833]	[0,0618]	[0,0297]	[0,0065]	[0,0034]
$\hat{\lambda}_{1,1}$	0,0354	-0,0191	0,0047	-0,0041	-0,0006	0,0028
	[0,2888]	[0,0721]	[0,0456]	[0,0189]	[0,0046]	[0,0021]
$\hat{\lambda}_{1,2}, \hat{\lambda}_{2,1}$	0,0346	-0,0013	0,0228	-0,0139	-0,0014	0,0018
	[0,3495]	[0,0745]	[0,0465]	[0,0205]	[0,0039]	[0,0022]
$\hat{\lambda}_{1,3}, \hat{\lambda}_{3,1}$	-0,0708	0,0328	0,0057	-0,0036	0,0070	0,0001
	[0,6106]	[0,1510]	[0,0939]	[0,0427]	[0,0077]	[0,0042]
$\hat{\lambda}_{2,2}$	0,0054	0,0145	0,0118	-0,0106	0,0025	0,0033
	[0,5320]	[0,1255]	[0,0702]	[0,0325]	[0,0062]	[0,0040]
$\hat{\lambda}_{2,3}, \hat{\lambda}_{3,2}$	-0,0331	0,0540	-0,0090	0,0121	0,0034	-0,0021
	[0,7969]	[0,1633]	[0,0924]	[0,0399]	[0,0068]	[0,0046]
$\hat{\lambda}_{3,3}$	-0,0928	0,0440	-0,0149	0,0269	0,0026	0,0011
	[1,0304]	[0,2185]	[0,1269]	[0,0653]	[0,0111]	[0,0064]

Tabel III.2 - III.5 menampilkan bias dan RKK dari penaksir parameter distribusi eksak JALNK untuk berbagai kasus-kasus yang disebutkan di atas. Tabel III.2 dan III.3 untuk kasus  $N$  berdistribusi  $\text{bin}(3;0,5)$ , sedangkan Tabel III.4 dan III.5 untuk kasus  $N$  berdistribusi  $DU(1,3)$ . Dalam Tabel III.2 - III.5, nilai yang berada dalam tanda kurung siku menyatakan RKK.

Tabel III.6 Konsistensi dari penaksir MLMP untuk  $N \sim \text{bin}(3;0,5)$

$m$	Penaksir									
	$\hat{p}$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\lambda}_{1,1}$	$\hat{\lambda}_{1,2}, \hat{\lambda}_{2,1}$	$\hat{\lambda}_{1,3}, \hat{\lambda}_{3,1}$	$\hat{\lambda}_{2,2}$	$\hat{\lambda}_{2,3}, \hat{\lambda}_{3,2}$	$\hat{\lambda}_{3,3}$
10	0,845	0,845	0,940	0,970	0,965	0,985	0,985	0,980	0,970	0,990
30	0,570	0,780	0,830	0,925	0,835	0,930	0,980	0,880	0,945	0,940
50	0,590	0,780	0,800	0,865	0,790	0,895	0,955	0,865	0,955	0,955
100	0,315	0,630	0,745	0,825	0,735	0,890	0,885	0,835	0,940	0,885
500	0,025	0,320	0,445	0,670	0,490	0,690	0,840	0,550	0,830	0,820
1.000	0,010	0,130	0,275	0,620	0,255	0,565	0,745	0,450	0,725	0,675

Tabel III.7 Konsistensi dari penaksir MMU diperbarui kontinu untuk  $N \sim \text{bin}(3;0,5)$

$m$	Penaksir									
	$\hat{p}$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\lambda}_{1,1}$	$\hat{\lambda}_{1,2}, \hat{\lambda}_{2,1}$	$\hat{\lambda}_{1,3}, \hat{\lambda}_{3,1}$	$\hat{\lambda}_{2,2}$	$\hat{\lambda}_{2,3}, \hat{\lambda}_{3,2}$	$\hat{\lambda}_{3,3}$
10	0,825	0,860	0,940	0,965	0,960	0,985	0,985	0,975	0,970	0,990
30	0,610	0,790	0,850	0,925	0,850	0,920	0,965	0,875	0,945	0,945
50	0,570	0,770	0,815	0,875	0,795	0,895	0,945	0,870	0,960	0,945
100	0,315	0,620	0,735	0,815	0,755	0,890	0,890	0,835	0,930	0,870
500	0,075	0,355	0,430	0,655	0,520	0,690	0,830	0,555	0,830	0,830
1.000	0,060	0,195	0,300	0,595	0,270	0,560	0,765	0,440	0,745	0,650

Berdasarkan nilai-nilai yang ada pada Tabel III.2 dan III.5, dapat disimpulkan bahwa secara umum metode penaksiran MLMP lebih baik dibandingkan dengan MMU diperbarui kontinu karena memiliki bias dan RKK yang lebih kecil. Di lain pihak, kedua metode konsisten dalam menaksir parameter-parameter distribusi eksak JALNK. Hal ini ditunjukkan dalam Tabel III.6 - III.9.

Tabel III.8 Konsistensi dari penaksir MLMP untuk  $N \sim \text{DU}(1,3)$

$m$	Penaksir								
	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\lambda}_{1,1}$	$\hat{\lambda}_{1,2}, \hat{\lambda}_{2,1}$	$\hat{\lambda}_{1,3}, \hat{\lambda}_{3,1}$	$\hat{\lambda}_{2,2}$	$\hat{\lambda}_{2,3}, \hat{\lambda}_{3,2}$	$\hat{\lambda}_{3,3}$
10	0,870	0,910	0,945	0,925	0,960	0,975	0,930	0,980	0,955
30	0,795	0,825	0,865	0,880	0,905	0,940	0,840	0,900	0,885
50	0,665	0,700	0,840	0,840	0,880	0,925	0,865	0,885	0,915
100	0,635	0,655	0,800	0,715	0,840	0,885	0,800	0,885	0,865
500	0,240	0,315	0,525	0,425	0,575	0,715	0,490	0,625	0,570
1.000	0,125	0,230	0,365	0,260	0,535	0,640	0,400	0,670	0,550

Tabel III.9 Konsistensi dari penaksir MMU diperbarui kontinu untuk  $N \sim \text{DU}(1,3)$

$m$	Penaksir								
	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\lambda}_{1,1}$	$\hat{\lambda}_{1,2}, \hat{\lambda}_{2,1}$	$\hat{\lambda}_{1,3}, \hat{\lambda}_{3,1}$	$\hat{\lambda}_{2,2}$	$\hat{\lambda}_{2,3}, \hat{\lambda}_{3,2}$	$\hat{\lambda}_{3,3}$
10	0,875	0,915	0,945	0,945	0,960	0,975	0,935	0,975	0,960
30	0,775	0,835	0,870	0,865	0,900	0,940	0,870	0,905	0,885
50	0,680	0,740	0,835	0,845	0,895	0,920	0,870	0,875	0,905
100	0,620	0,655	0,795	0,760	0,830	0,875	0,810	0,875	0,860
500	0,305	0,385	0,520	0,440	0,595	0,735	0,500	0,630	0,590
1.000	0,170	0,240	0,385	0,240	0,545	0,655	0,390	0,645	0,555

### III.5.2 Perbandingan Hasil Penaksiran Mean dan Variansi JALNK

Simulasi Monte Carlo akan digunakan untuk menyelidiki kinerja tiga metode penaksiran mean dan variansi dari JALNK yang teorinya telah dibahas pada Subbab III.4.2 dan III.4.3. Metode pertama adalah metode momen (MM) yang penaksirnya ada pada Persamaan (III.21) dan (III.22). Metode kedua adalah metode yang bersifat parametrik dengan prinsip plug-in (MP1) yang penaksirnya ada pada Persamaan (III.25) dan (III.26). Metode ketiga adalah metode yang bersifat parametrik berdasarkan distribusi pendekatan dari JALNK (MP2) yang penaksirnya ada pada Persamaan (III.31) dan (III.32). Penyelidikan didasarkan pada bias, RKK, dan konsistensi dari ketiga penaksir berdasarkan sampel yang disimulasikan. Tahapan simulasinya adalah sebagai berikut:

1. Bangkitkan  $N$  dari distribusi peubah acak diskrit.
2. Bangkitkan  $X_1, \dots, X_N$  dari distribusi lognormal multivariat.
3. Hitung JALNK,  $Z_N = X_1 + \dots + X_N$ .
4. Ulangi Langkah 1 sampai 3 sebanyak  $m$  kali.
5. Hitung penaksir mean dan variansi dari ketiga metode berdasarkan  $m$  pengamatan yang dibangkitkan.
6. Ulangi Langkah 1 sampai 5 sebanyak 1.000 kali.
7. Hitung bias, RKK, dan ukuran konsistensi dari ketiga penaksir mean dan variansi dari JALNK.

Tiga distribusi dipertimbangkan dalam simulasi untuk peubah acak  $N$ , yaitu seragam diskrit,  $DU(1,5)$ , binomial,  $\text{bin}(5;0,5)$ , dan Poisson dengan parameter  $\eta = 2$ . Parameter-parameter dari distribusi lognormal multivariat adalah  $\theta_i = \theta = 1,5$ ,  $\lambda_{i,i} = 1$ , dan  $\rho_{i,j} = \rho = 0,5$ , untuk  $i, j = 1, \dots, l$ ,  $i \neq j$ . Sedangkan ukuran sampel yang akan dicobakan adalah,  $m = 10, 30, 50, 100, 500, 1.000$ .

Tabel III.10 - III.15 menampilkan bias dan RKK dari tiga penaksir mean dan variansi JALNK untuk berbagai kasus di atas. Tabel III.10 dan III.11 untuk kasus  $N$  berdistribusi seragam diskrit, Tabel III.12 dan III.13 untuk kasus  $N$  berdistribusi binomial, dan Tabel III.14 dan III.15 untuk kasus  $N$  berdistribusi Poisson. Untuk kasus  $N$  berdistribusi Poisson, hasil simulasi untuk metode MP2

tidak ada karena secara komputasi sulit untuk diimplementasikan. Dalam Tabel III.10 – III.15, nilai yang berada dalam tanda kurung siku menyatakan RKK.

Berdasarkan nilai-nilai yang ada pada Tabel III.10 dan III.11, dapat disimpulkan bahwa untuk kasus  $N$  berdistribusi seragam diskrit, ukuran sampel  $m \leq 15$  (Lampiran B) dan  $m \geq 500$ , metode MP1 lebih baik dibandingkan dengan metode lainnya dalam menaksir mean JALNK karena memiliki nilai bias dan RKK yang kecil. Sedangkan untuk ukuran sampel  $15 < m \leq 100$ , tidak ada satu pun metode yang terbaik. Untuk kasus ini metode MM memiliki akurasi yang baik dalam menaksir mean JALNK namun tidak bagus presisinya, sebaliknya metode MP1 memiliki presisi yang baik namun tidak akurat. Metode MP1 merupakan metode yang terbaik untuk menaksir variansi JALNK pada kasus  $30 \leq m \leq 500$  karena memiliki bias dan RKK yang kecil. Sedangkan untuk ukuran sampel lainnya tidak ada satu pun metode yang terbaik.

Tabel III.10. Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK\* untuk  $N \sim DU(1,5)$  dan  $\theta = 1$

$m$	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
10	1,0020 [27,0232]	-89,9817 [105.735,4389]	-0,9607 [18,4789]	-20,0491 [223.645,4729]	2,1604 [37,5962]	90,7713 [596.105,8399]
30	0,1841 [9,6865]	-34,9319 [68.347,1652]	-0,2271 [7,1520]	-2,6261 [44.175,2464]	0,5923 [10,3547]	30,3664 [59.998,1860]
50	-0,0020 [5,7654]	-27,3284 [53.800,4401]	-0,1199 [4,4895]	3,9378 [26.893,4127]	0,2965 [5,8341]	21,2357 [31.340,9608]
100	-0,0008 [2,7315]	-14,5621 [22.965,2449]	-0,0275 [2,0432]	5,2226 [11.978,5781]	0,1396 [2,6480]	12,3756 [13.603,4478]
500	-0,0050 [0,5285]	-5,6697 [6.200,4918]	-0,0001 [0,4134]	2,2161 [2.296,1846]	0,0250 [0,5054]	2,5146 [2.401,9470]
1.000	-0,0110 [0,2926]	-4,6434 [3.444,4329]	-0,0034 [0,2272]	2,1864 [1.214,5940]	0,0117 [0,2713]	2,0173 [1.269,7743]

\*nilai mean JALNK sebenarnya adalah 13,4451,  
nilai variansi JALNK sebenarnya adalah 281,7252.

Tabel III.11. Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK\* untuk  $N \sim DU(1,5)$  dan  $\theta = 5$

m	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
10	86,8270 [96.547,0625]	-182.704 [1,41E+12]	-29,2627 [57.855,0236]	42.432,75 [3,03E+12]	1.484,6120 [14.601.728,0526]	1,63E+08 [6,29E+17]
30	2,9534 [26.382,0332]	-136.990 [5,02E+11]	-21,7756 [19.572,5511]	-36.753,1 [3,18E+11]	89,9439 [181.024,6590]	4.073.878 [4,69E+15]
50	-3,7143 [17.106,2911]	-114.579 [3,18E+11]	-11,4013 [13.468,0397]	-7.409,74 [2,12E+11]	23,7287 [20.927,0959]	124.971,6 [7,18E+11]
100	-1,5389 [7.932,1465]	-26.020,2 [4,3E+11]	-4,5374 [6.272,1841]	15.199,62 [1,06E+11]	5,6909 [7.425,3304]	22.801,65 [1,09E+11]
500	-2,3523 [1.848,5729]	-11.091,6 [6,98E+10]	-1,6763 [1.428,6920]	5.715,214 [2,16E+10]	9,6222 [1.860,2431]	42.337,59 [2,23E+10]
1.000	1,2977 [888,8970]	-2.920,42 [3,32E+10]	1,2123 [686,1403]	9.262,332 [1,06E+10]	14,1267 [1.253,2185]	58.303,11 [1,79E+10]

\*nilai mean JALNK sebenarnya adalah 734,0758,  
nilai variansi JALNK sebenarnya adalah 839.810,8669.

Tabel III.12. Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK\* untuk  $N \sim bin(5;0,5)$  dan  $\theta = 1$

m	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
10	1,5698 [24,5379]	-1,1928 [125.812,5902]	0,9281 [21,5163]	85,3670 [251.619,6578]	2,7881 [33,9188]	194,8614 [432.357,3462]
30	0,3830 [6,4225]	-22,9123 [32.900,2337]	0,2275 [6,2846]	7,1829 [27.550,2060]	0,8171 [7,4854]	37,7966 [38.546,7315]
50	0,1877 [3,7355]	-20,5809 [19.460,6313]	0,1259 [3,6224]	-0,9133 [12.242,1202]	0,4562 [3,9628]	18,2738 [15.167,6457]
100	0,1150 [2,0840]	-3,8157 [19.146,0975]	0,0888 [1,9005]	-1,2569 [6.564,0572]	0,2420 [2,0041]	9,4158 [7.322,5576]
500	-0,0270 [0,4238]	-5,7730 [4.513,2705]	-0,0159 [0,4003]	-2,9472 [1.354,0123]	0,0114 [0,4030]	1,4530 [1.317,5395]
1.000	-0,0402 [0,1949]	-1,0648 [2.024,9601]	-0,0481 [0,1786]	-4,9247 [581,3770]	-0,0351 [0,1781]	-1,0959 [568,6959]

\*nilai mean JALNK sebenarnya adalah 11,2042,  
nilai variansi JALNK sebenarnya adalah 197,6486.

Berdasarkan nilai-nilai yang ada pada Tabel III.12 dan III.13, secara umum dapat disimpulkan bahwa untuk kasus  $N$  berdistribusi binomial, metode MP1 lebih baik dibandingkan dengan metode lainnya dalam menaksir mean JALNK karena memiliki nilai bias dan RKK yang kecil. Metode MM merupakan metode yang terbaik untuk menaksir variansi JALNK pada kasus  $m < 30$  karena memiliki

nilai bias dan RKK yang kecil. Sementara itu untuk kasus  $30 \leq m \leq 500$  metode MP1 merupakan metode yang terbaik untuk menaksir variansi JALNK. Sedangkan untuk ukuran sampel lainnya tidak ada satu pun metode yang terbaik.

Tabel III.13. Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK\* untuk  $N \sim \text{bin}(5;0,5)$  dan  $\theta = 5$

m	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
10	86,2906 [78.150,8670]	-10,2707 [9,04E+11]	54,4639 [71.526,6386]	350.322 [4,16E+12]	767,0470 [3.866.231,8137]	1,01E+08 [1,97E+17]
30	24,0146 [20.045,4436]	-74.671,8 [3,59E+11]	14,5564 [19.320,7270]	15.175,85 [2,11E+11]	159,4423 [191.001,5046]	13.829.281 [7,38E+15]
50	15,2071 [11.367,9281]	-35.229,7 [2,18E+11]	9,6586 [10.647,5445]	-62,9426 [1,06E+11]	82,1030 [53.133,3742]	5.276.403 [1,46E+15]
100	3,1125 [5.600,7922]	-46.757,3 [1,31E+11]	1,6106 [5.236,8547]	-25.337,8 [4,67E+10]	35,7641 [13.670,4597]	1.129.259 [2,84E+14]
500	-0,5322 [1.062,7912]	-15.017,5 [3,5E+10]	-0,0274 [987,4014]	-10.311,6 [9,75E+09]	20,3899 [1.988,6072]	83.171,21 [2,64E+10]
1.000	-0,3446 [647,3200]	-8.375,38 [1,91E+10]	-0,0733 [577,9537]	-8.814,1 [5,68E+09]	22,3584 [1.809,1177]	99.622,78 [3,17E+10]

\*nilai mean JALNK sebenarnya adalah 611,7298,  
nilai variansi JALNK sebenarnya adalah 589.812,1979.

Tabel III.14. Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK\* untuk  $N \sim \text{Poisson}(\eta = 2)$  dan  $\theta = 1$

m	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
10	-0,0631 16,2497	-20,4081 82.201,9934	-1,1828 14,2440	430.511,5 5,31E+13		
30	0,0450 5,9691	0,1022 60.679,7108	-0,4329 5,5130	1.888,084 2,76E+08		
50	-0,0166 3,1870	-7,7641 19.514,3860	-0,3386 3,0679	30.520,69 3,73E+11		
100	0,0554 1,7230	0,1720 15.667,3840	-0,1135 1,5725	10.966,44 4,91E+10		
500	-0,0037 0,3562	-0,9957 3.259,0990	-0,0397 0,3344	617,45 1,19E+08		
1.000	0,0065 0,1742	0,3965 1.899,3368	-0,0167 0,1594	66,28315 2.453.113		

\*nilai mean JALNK sebenarnya adalah 8,9634,  
nilai variansi JALNK sebenarnya adalah 178,2044.

Tabel III.15. Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK\* untuk  $N \sim \text{Poisson}(\eta = 2)$  dan  $\theta = 5$

$m$	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
10	3,0340	18.241,53	-59,1396	6,96E+08		
	53.781,7700	2,45E+12	44.350,9952	1,21E+21		
30	-0,6462	-2.247,42	-25,9828	1,74E+11		
	17.879,3911	5,2E+11	16.172,9041	1,22E+26		
50	0,0363	6.946,876	-16,5278	2,55E+08		
	10.418,0636	3,74E+11	9.513,6909	1,88E+20		
100	-1,1332	-1.219,64	-9,8983	2.636.058		
	5.440,4687	2,1E+11	5.073,7962	1,05E+16		
500	-0,3608	-788,497	-2,4331	4.962.548		
	1.064,8771	3,99E+10	990,7798	2,70E+16		
1.000	0,1874	2.494,93	-0,8619	92.174.269		
	537,8471	2,65E+10	497,6038	3,66E+19		

\*nilai mean JALNK sebenarnya adalah 489,3839,  
 nilai variansi JALNK sebenarnya adalah 531.219,9000.

Berdasarkan nilai-nilai yang ada pada Tabel III.14 dan III.15, untuk kasus  $N$  berdistribusi Poisson, tidak ada satu pun metode yang terbaik untuk menaksir mean JALNK. Metode MM memiliki akurasi yang baik dalam menaksir mean JALNK namun tidak bagus presisinya, sebaliknya metode MP1 memiliki presisi yang baik namun tidak akurat. Metode MM merupakan metode yang terbaik untuk menaksir variansi JALNK untuk semua kasus ukuran sampel yang dicobakan.

Tabel III.16. Ukuran konsistensi dari penaksir mean dan variansi JALNK untuk  $N \sim \text{DU}(1,5)$  dan  $\theta = 1$

$m$	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
10	0,883	0,974	0,888	0,977	0,889	0,968
30	0,809	0,955	0,809	0,955	0,821	0,945
50	0,793	0,960	0,753	0,931	0,786	0,938
100	0,670	0,922	0,626	0,893	0,697	0,882
500	0,356	0,847	0,295	0,750	0,334	0,758
1.000	0,218	0,801	0,166	0,695	0,197	0,695

Tabel III.16 sampai III.21 menampilkan ukuran konsistensi untuk tiga metode penaksiran mean dan variansi JALNK. Dapat disimpulkan bahwa semua metode penaksiran mean dan variansi JALNK konsisten kecuali metode penaksiran MP1 untuk variansi pada kasus  $N$  berdistribusi Poisson.

Tabel III.17. Ukuran konsistensi dari penaksir mean dan variansi JALNK untuk  $N \sim DU(1,5)$  dan  $\theta = 5$

$m$	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
10	0,892	0,974	0,880	0,973	0,914	0,967
30	0,819	0,961	0,777	0,939	0,831	0,930
50	0,762	0,943	0,739	0,919	0,756	0,920
100	0,663	0,931	0,646	0,905	0,660	0,884
500	0,347	0,845	0,301	0,752	0,365	0,741
1.000	0,216	0,795	0,154	0,670	0,296	0,690

Tabel III.18. Ukuran konsistensi dari penaksir mean dan variansi JALNK untuk  $N \sim bin(5;0,5)$  dan  $\theta = 1$

$m$	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
10	0,890	0,961	0,886	0,970	0,918	0,965
30	0,821	0,960	0,816	0,932	0,834	0,932
50	0,772	0,952	0,763	0,913	0,768	0,924
100	0,675	0,938	0,681	0,899	0,676	0,883
500	0,392	0,861	0,355	0,772	0,363	0,767
1.000	0,211	0,836	0,181	0,696	0,183	0,702

Tabel III.19. Ukuran konsistensi dari penaksir mean dan variansi JALNK untuk  $N \sim bin(5;0,5)$  dan  $\theta = 5$

$m$	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
10	0,900	0,970	0,913	0,966	0,929	0,973
30	0,833	0,963	0,796	0,948	0,851	0,942
50	0,765	0,947	0,776	0,927	0,808	0,915
100	0,645	0,925	0,655	0,901	0,704	0,880
500	0,370	0,850	0,334	0,774	0,542	0,828
1.000	0,221	0,809	0,199	0,702	0,481	0,785

Tabel III.20. Ukuran konsistensi dari penaksir mean dan variansi JALNK untuk  $N \sim \text{Poisson}(\eta = 2)$  dan  $\theta = 1$

$m$	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
10	0,920	0,975	0,924	0,364		
30	0,847	0,957	0,850	0,377		
50	0,791	0,944	0,783	0,397		
100	0,725	0,935	0,719	0,393		
500	0,452	0,849	0,439	0,390		
1.000	0,285	0,833	0,248	0,367		

Tabel III.21. Ukuran konsistensi dari penaksir mean dan variansi JALNK untuk  $N \sim \text{Poisson}(\eta = 2)$  dan  $\theta = 5$

$m$	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
10	0,908	0,976	0,921	0,352		
30	0,850	0,965	0,861	0,387		
50	0,809	0,949	0,805	0,391		
100	0,732	0,937	0,738	0,396		
500	0,449	0,869	0,435	0,388		
1.000	0,290	0,823	0,272	0,376		

### III.5.3 Kinerja Taksiran Aproksimasi Distribusi dari JALNK

Taksiran aproksimasi distribusi dari JALNK yang dihasilkan pada Persamaan (III.29) atau (III.30) akan coba diperiksa kinerjanya dengan menggunakan simulasi Monte Carlo. Distribusi JALNK hasil simulasi Monte Carlo 10.000 kali akan digunakan sebagai pendekatan yang cukup baik untuk distribusi eksak dari JALNK. Aproksimasi distribusi dari JALNK berdasarkan data yang disimulasikan diuji apakah sama atau tidak dengan distribusi "eksak" di atas menggunakan uji Cramer-von Mises (Conover, 1999).

Beberapa kasus distribusi untuk peubah acak  $N$ , distribusi lognormal multivariat, dan ukuran sampel ( $m$ ) akan coba dipertimbangkan dalam membangkitkan peubah acak JALNK. Empat kasus untuk distribusi dari peubah acak  $N$ , yaitu  $DU(1,3)$ ,  $DU(1,5)$ ,  $\text{bin}(3;0,5)$ , dan  $\text{bin}(5;0,5)$ . Dua belas kasus untuk

distribusi lognormal multivariat dengan parameter-parameter  $\theta_i = \theta = 1, 3, 5$ ,  $\lambda_{i,i} = 1$ , dan  $\rho_{i,j} = \rho = 0,3, 0,5, 0,7, 1,0$ , untuk  $i, j = 1, \dots, l, i \neq j$ . Sedangkan kasus untuk ukuran sampel ada tujuh, yaitu  $m = 10, 20, 30, 50, 100, 500, 1.000$ . Dengan demikian total ada  $4 \times 12 \times 7 = 336$  kasus. Untuk setiap kasus, simulasi Monte Carlo dilakukan sebanyak 1.000 kali. Nilai statistik uji Cramer-von Mises dihitung berdasarkan data JALNK yang dibangkitkan pada setiap kali simulasi. Nilai statistik uji tersebut dibandingkan dengan nilai kritisnya untuk taraf nyata,  $\alpha = 5\%$ , yaitu  $w_{0,95} = 0,461$  (Conover, 1999). Tabel III.22 sampai III.28 menampilkan banyaknya nilai statistik uji yang lebih besar dari nilai kritis dari 1.000 kali simulasi.

Berdasarkan Tabel III.22 sampai III.28 terlihat bahwa banyaknya nilai statistik uji Cramer-von Mises yang lebih besar dari nilai kritis adalah sangat sedikit dibandingkan dengan jumlah simulasi (1.000), dengan minimumnya adalah 0, dan maksimumnya adalah 47 atau sekitar 4,7%. Persentase ini masih lebih kecil dari taraf nyata yang ditetapkan, yaitu  $\alpha = 5\%$ . Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa secara statistik, taksiran aproksimasi distribusi dari JALNK yang dibangun dalam bab ini tidak berbeda dengan distribusi eksaknya. Artinya taksiran aproksimasi distribusi dari JALNK yang ada pada Persamaan (III.29), atau (III.30), bersama-sama dengan taksiran persentilnya masing-masing dapat digunakan sebagai pendekatan yang baik untuk distribusi dan persentil dari JALNK. Kualitas dari taksiran aproksimasi distribusi dari JALNK tidak saja bagus untuk ukuran sampel besar, untuk ukuran sampel kecilpun masih tetap bagus. Nilai koefisien korelasi (baik besar ataupun kecil) tidak mempengaruhi kualitas dari taksiran aproksimasi distribusi dari JALNK yang diusulkan. Hal ini karena tidak ada kecenderungan apapun mengenai banyaknya nilai statistik uji Cramer-von Mises yang lebih besar dari nilai kritis dengan menaik atau menurunnya nilai koefisien korelasi.

Tabel III.22. Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel,  $m = 10$

$\rho$	DU(1,3)			DU(1,5)			bin(3;0,5)			bin(5;0,5)		
	$\theta$			$\theta$			$\theta$			$\theta$		
	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5
0,3	0	0	4	0	0	14	5	4	18	6	4	47
0,5	0	0	3	0	0	15	3	6	10	2	5	46
0,7	1	0	4	0	0	12	3	2	8	2	1	35
1,0	1	2	3	1	2	12	2	2	7	2	6	26

Tabel III.23. Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel,  $m = 20$

$\rho$	DU(1,3)			DU(1,5)			bin(3;0,5)			bin(5;0,5)		
	$\theta$			$\theta$			$\theta$			$\theta$		
	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5
0,3	0	0	2	0	0	13	2	2	5	3	5	27
0,5	1	1	0	0	0	8	2	1	4	7	3	11
0,7	1	1	2	1	2	5	3	4	1	4	5	14
1,0	0	1	3	3	0	11	5	4	2	1	3	11

Tabel III.24. Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel,  $m = 30$

$\rho$	DU(1,3)			DU(1,5)			bin(3;0,5)			bin(5;0,5)		
	$\theta$			$\theta$			$\theta$			$\theta$		
	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5
0,3	0	0	2	0	0	9	5	1	6	3	7	8
0,5	2	0	1	0	0	0	2	2	4	1	4	8
0,7	0	0	1	0	1	4	3	4	1	7	6	9
1,0	2	1	1	0	1	0	4	3	1	4	2	4

Tabel III.25. Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel,  $m = 50$

$\rho$	DU(1,3)			DU(1,5)			bin(3;0,5)			bin(5;0,5)		
	$\theta$			$\theta$			$\theta$			$\theta$		
	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5
0,3	0	0	3	0	0	7	0	2	4	5	3	4
0,5	0	0	1	0	0	2	2	3	2	5	5	4
0,7	1	0	0	0	0	2	2	1	3	8	1	1
1,0	1	3	3	0	0	8	3	3	3	2	1	1

Tabel III.26. Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel,  $m = 100$

$\rho$	DU(1,3)			DU(1,5)			bin(3;0,5)			bin(5;0,5)		
	$\theta$			$\theta$			$\theta$			$\theta$		
	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5
0,3	0	0	1	0	0	0	2	5	1	1	3	3
0,5	1	0	1	0	1	0	2	7	6	0	6	5
0,7	2	0	1	0	1	2	4	4	3	4	4	3
1,0	0	3	1	1	0	2	2	2	4	2	5	4

Tabel III.27. Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel,  $m = 500$

$\rho$	DU(1,3)			DU(1,5)			bin(3;0,5)			bin(5;0,5)		
	$\theta$			$\theta$			$\theta$			$\theta$		
	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5
0,3	0	1	0	0	0	0	2	1	5	3	1	1
0,5	1	0	3	0	0	0	1	1	1	5	3	6
0,7	5	0	2	0	0	1	4	6	2	1	7	7
1,0	1	1	1	2	2	1	2	3	1	0	10	12

Tabel III.28. Hasil simulasi untuk menguji kinerja aproksimasi distribusi dari JALNK dengan ukuran sampel,  $m = 1.000$

$\rho$	DU(1,3)			DU(1,5)			bin(3;0,5)			bin(5;0,5)		
	$\theta$			$\theta$			$\theta$			$\theta$		
	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5
0,3	0	0	1	0	0	1	3	7	3	3	4	0
0,5	0	2	1	2	0	0	1	7	7	1	5	23
0,7	1	1	5	0	2	6	7	1	3	19	2	4
1,0	2	5	2	3	5	1	2	6	6	5	6	4

## **Bab IV Aplikasi Jumlah Acak Berkorelasi untuk Estimasi Utang Klaim**

Utang klaim merupakan pertanggungjawaban perusahaan asuransi terhadap klaim-klaim yang telah dilaporkan namun belum diselesaikan atau yang kerugiannya telah terjadi namun belum dilaporkan (Hossack, 1999). Pertanggungjawaban perusahaan asuransi di atas berkaitan dengan penyiapan sejumlah uang untuk memenuhi klaim-klaim yang diajukan pemegang polis. Salah satu pekerjaan penting bagi perusahaan asuransi adalah menghitung estimasi utang klaim.

Dalam bisnis asuransi *long-tail*, secara umum ada dua metode untuk mengestimasi utang klaim, yaitu metode agregat dan metode individu. Metode agregat didasarkan pada data pembayaran klaim agregat yang diringkas dalam bentuk *run-off triangle* (Mack, 1993; Barnett dan Zehnwirth, 2000; Pinheiro dkk., 2003; De Jong, 2006; dan De Alba, 2006). Metode individu didasarkan pada data pembayaran klaim individu (Wright, 1997; Taylor dan McGuire, 2004; Taylor dkk., 2006; dan McGuire, 2007).

Dalam bab ini akan dibahas metode estimasi utang klaim yang baru berdasarkan data pembayaran klaim individu dengan melibatkan tiga faktor di bawah ini:

1. distribusi dari frekuensi pembayaran,
2. distribusi dari besarnya pembayaran-pembayaran,
3. korelasi antar besarnya pembayaran untuk suatu klaim,

Dengan melihat ketiga faktor di atas, maka metode yang diusulkan akan dibangun berdasarkan jumlah acak berkorelasi yang teorinya telah dibahas dalam bab sebelumnya. Penelitian awal telah dilakukan oleh Mutaqin dkk. (2011). Penelitian awal ini hanya menggunakan pendekatan momen untuk estimasi utang klaimnya. Dalam disertasi ini, penelitian tersebut dikembangkan sehingga tidak hanya melibatkan pendekatan momen tapi juga pendekatan parametrik dan pendekatan berdasarkan distribusi bersyarat.

Misalkan  $X_i$  menyatakan besarnya pembayaran ke- $i$  untuk suatu klaim, maka total besarnya pembayaran untuk suatu klaim dapat dinyatakan sebagai jumlah,  $Z_N$ , dari suatu peubah acak,  $N$ , dari besarnya pembayaran-pembayaran individu berkorelasi  $(X_1, \dots, X_N)$ . Dengan demikian,

$$Z_N = X_1 + \dots + X_N, \quad N = 1, 2, \dots,$$

dengan  $X_1, \dots, X_N$  berkorelasi, dan  $N$  bebas dari  $X_1, \dots, X_N$ .

Dalam disertasi ini, total besarnya pembayaran untuk suatu klaim diasumsikan sebagai JALNK. Artinya distribusi gabungan dari besarnya pembayaran-pembayaran individu diasumsikan lognormal multivariat. Pembahasan akan dibatasi hanya untuk klaim-klaim yang telah dilaporkan tetapi belum diselesaikan. Simulasi Monte Carlo akan dilakukan untuk membandingkan kinerja dari metode yang diusulkan dengan metode chain ladder.

Bab ini terdiri dari tiga subbab. Subbab IV.1 membahas metode estimasi yang bersifat kasar untuk utang klaim berdasarkan JALNK. Metode kasar ini akan didasarkan pada estimasi mean dari JALNK. Teori estimasi utang klaim dengan melibatkan distribusi bersyarat dari total pembayaran dalam suatu klaim diusulkan dalam Subbab IV.2. Selanjutnya, perbandingan kinerja dari metode-metode yang diusulkan dengan metode chain ladder dikemukakan dalam Subbab IV.3. Subbab terakhir membahas penerapan metode yang diusulkan untuk data nyata.

#### **IV.1 Metode Estimasi Kasar untuk Utang Klaim**

Utang klaim berkaitan dengan pembayaran-pembayaran di masa datang untuk klaim-klaim yang telah dilaporkan namun belum diselesaikan atau yang kerugiannya telah terjadi namun belum dilaporkan. Disertasi ini akan memfokuskan pada penentuan estimasi utang klaim untuk klaim-klaim yang telah dilaporkan namun belum diselesaikan. Diasumsikan bahwa seluruh klaim dapat diselesaikan dalam selang  $(0, T]$  sejak klaim dilaporkan ke perusahaan asuransi, dengan  $T$  adalah suatu konstanta yang diketahui.

Klaim-klaim yang telah dilaporkan, dikategorikan ke dalam dua jenis, yaitu klaim yang telah diselesaikan dan klaim yang belum diselesaikan. Misalkan  $m$  menyatakan banyaknya klaim yang telah diselesaikan, dan  $Z_{N_1,1}^f, Z_{N_2,2}^f, \dots, Z_{N_m,m}^f$  menyatakan sampel acak berukuran  $m$  dari total besarnya pembayaran untuk  $m$  klaim yang telah diselesaikan, dengan  $Z_{N_k,k}^f$  menyatakan total besarnya pembayaran dengan  $N_k$  kali pembayaran untuk klaim ke- $k$  yang telah diselesaikan. Peubah acak total besarnya pembayaran untuk klaim-klaim yang telah diselesaikan dapat dinyatakan sebagai berikut

$$Z_{N_k,k}^f = X_{1,k}^f + \dots + X_{N_k,k}^f, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

dengan  $X_{j,k}^f$  menyatakan besarnya pembayaran ke- $j$  untuk klaim ke- $k$  yang telah diselesaikan.

Untuk klaim-klaim yang belum diselesaikan, paling sedikit ada satu pembayaran yang besarnya tidak diketahui. Misalkan  $X_{j_l+1,l}^u, \dots, X_{N_l,l}^u$ ,  $l = 1, 2, \dots, d$ ,  $0 \leq j_l < N_l$ , menyatakan besarnya pembayaran-pembayaran individu tak diketahui untuk klaim ke- $l$  yang belum diselesaikan, dengan  $d$  menyatakan banyaknya klaim yang belum diselesaikan. Diasumsikan bahwa  $Z_{N_1,1}^f, Z_{N_2,2}^f, \dots, Z_{N_m,m}^f, Z_{N_1,1}^u, Z_{N_2,2}^u, \dots, Z_{N_d,d}^u$  saling bebas dan berdistribusi identik. Dengan demikian,  $E[Z_{N_l,l}^u] = E[Z_{N_k,k}^f] = E(Z_N)$ .

Total besarnya pembayaran untuk klaim ke- $l$  yang belum diselesaikan dapat dinyatakan sebagai berikut

$$Z_{N_l,l}^u = X_{1,l}^u + \dots + X_{j_l,l}^u + X_{j_l+1,l}^u + \dots + X_{N_l,l}^u$$

atau

$$X_{j_l+1,l}^u + \dots + X_{N_l,l}^u = Z_{N_l,l}^u - (X_{1,l}^u + \dots + X_{j_l,l}^u) \quad (\text{IV.1})$$

Ruas kiri pada Persamaan (IV.1) menyatakan total besarnya pembayaran yang tidak diketahui untuk klaim ke- $l$  yang belum diselesaikan. Ekspektasi total besarnya pembayaran yang tidak diketahui untuk klaim ke- $l$  yang belum diselesaikan diberikan bahwa  $X_{1,l}^u = x_{1,l}^u, \dots, X_{j_l,l}^u = x_{j_l,l}^u$  atau  $Z_{j_l,l}^u = z_{j_l,l}^u$  dan  $N_l > j_l$ ,  $j_l = 0, 1, \dots$ , adalah

$$\begin{aligned} E[X_{j_l+1,l}^u + \dots + X_{N_l,l}^u | Z_{j_l,l}^u = z_{j_l,l}^u, N_l > j_l] \\ = E[Z_{N_l,l}^u | Z_{j_l,l}^u = z_{j_l,l}^u, N_l > j_l] - z_{j_l,l}^u \end{aligned} \quad (IV.2)$$

Persamaan (IV.2) dapat dinyatakan sebagai ekspektasi utang klaim individu untuk klaim ke- $l$  yang belum diselesaikan, atau  $UK_l$ , dan diberikan oleh

$$E[UK_l | Z_{j_l,l}^u = z_{j_l,l}^u, N_l > j_l] = E[Z_{N_l,l}^u | Z_{j_l,l}^u = z_{j_l,l}^u, N_l > j_l] - z_{j_l,l}^u$$

Ekspektasi total utang klaim diberikan oleh

$$\begin{aligned} E[TUK] &= \sum_{l=1}^d E[UK_l | Z_{j_l,l}^u = z_{j_l,l}^u, N_l > j_l]. \\ &= \sum_{l=1}^d \{E[Z_{N_l,l}^u | Z_{j_l,l}^u = z_{j_l,l}^u, N_l > j_l] - z_{j_l,l}^u\} \end{aligned} \quad (IV.3)$$

Terlihat bahwa estimasi total utang klaim tergantung pada penaksir dari ekspektasi,  $E[Z_{N_l,l}^u | Z_{j_l,l}^u = z_{j_l,l}^u, N_l > j_l]$ , untuk  $l = 1, 2, \dots, d$ . Salah satu pendekatan kasar untuk menaksir ekspektasi tersebut adalah menggunakan penaksir dari  $E(Z_N)$ . Penaksir dari  $E(Z_N)$  dapat dihitung menggunakan data klaim yang telah diselesaikan dengan menggunakan metode-metode MM, MP1, dan MP2 yang rumusnya telah dibahas pada Bab III. Bersama-sama dengan data klaim yang belum diselesaikan, maka akan diperoleh hasil estimasi total utang klaim.

Misalkan  $ETUK_{MM}$ ,  $ETUK_{MP1}$ , dan  $ETUK_{MP2}$  masing-masing menyatakan estimasi total utang klaim menggunakan metode-metode MM, MP1, dan MP2. Dengan menggunakan data klaim yang telah diselesaikan dan data klaim yang belum

diselesaikan, ketiga estimasi total utang klaim di atas dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan (IV.3), dengan  $E[Z_{N,l}^u | Z_{j,l}^u = z_{j,l}^u, N_l > j_l]$  diganti oleh rumus pada Persamaan (III.21), (III.25), dan (III.31).

## IV.2 Metode Estimasi Utang Klaim dengan Melibatkan Distribusi Bersyarat dari Total Pembayaran Klaim

Metode estimasi yang dibahas pada Subbab IV.1 bersifat kasar, dengan  $E[Z_{N,l}^u | Z_{j,l}^u = z_{j,l}^u, N_l > j_l]$  diganti oleh  $E[Z_{N,l}^u]$ . Untuk menghitung ekspektasi  $E[Z_{N,l}^u | Z_{j,l}^u = z_{j,l}^u, N_l > j_l]$  secara tepat, perlu diketahui distribusi bersyarat dari  $Z_{N,l}^u | Z_{j,l}^u = z_{j,l}^u, N_l > j_l$  atau singkatnya  $Z_N | Z_j, N > j, j = 0, 1, \dots$ . Fungsi distribusi kumulatif bersyarat dari  $Z_N | Z_j, N > j, j = 0, 1, \dots$ , adalah

$$\begin{aligned} F_{Z_N | Z_j, N > j}(z) &= P(Z_N \leq z | Z_j = z_j, N > j) \\ &= \sum_{l > j} P(Z_N \leq z | Z_j = z_j, N = l) p_{N|N > j}(l | N > j) \\ &= \sum_{l > j} P(Z_l \leq z | Z_j = z_j) p_{N|N > j}(l | N > j) \\ &= \sum_{l > j} F_{Z_l | Z_j}(z) p_{N|N > j}(l | N > j). \end{aligned}$$

Sedangkan fungsi densitas peluang bersyaratnya adalah

$$f_{Z_N | Z_j, N > j}(z) = \sum_{l > j} f_{Z_l | Z_j}(z) p_{N|N > j}(l | N > j).$$

Terlihat bahwa distribusi bersyarat dari  $Z_N | Z_j, N > j, j = 0, 1, \dots$ , tergantung pada distribusi bersyarat dari  $Z_l | Z_j$ , dengan  $l > j$ , dan distribusi bersyarat dari  $N | N > j, j = 0, 1, \dots$ .

Distribusi bersyarat dari  $N | N > j, j = 0, 1, \dots$ , tergantung pada distribusi frekuensi pembayaran, yang dapat dihitung dengan menggunakan rumus umum berikut

$$p_{N|N>j}(l|N > j) = \frac{p_N(l)}{P(N > j)}, \quad l > j.$$

Sedangkan distribusi bersyarat dari  $Z_l|Z_j$ , dengan  $l > j$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , dapat dihitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut

$$f_{Z_l|Z_j}(z_l|z_j) = \frac{f_{Z_j, Z_l}(z_j, z_l)}{f_{Z_j}(z_j)}, \quad f_{Z_j}(z_j) > 0, z_l > 0. \quad (\text{IV.4})$$

Distribusi  $f_{Z_j}(z_j)$  dapat dihitung dengan menggunakan hasil dari Mehta dkk. (2007), dengan aproksimasi distribusinya adalah lognormal univariat. Untuk kasus  $j = 0$ , dan  $l > j$ , fungsi densitas peluang bersyarat dari  $Z_l|Z_j$  adalah

$$f_{Z_l|Z_j}(z_l|z_j) = f_{Z_l}(z_l),$$

yang aproksimasi distribusinya adalah lognormal univariat (Mehta dkk., 2007). Untuk kasus  $j = 1$ , dan  $l = 2$ , maka distribusi bersyarat dari  $Z_2|Z_1$  dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut

$$f_{Z_2|Z_1}(z_2|z_1) = \frac{f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2)}{f_{Z_1}(z_1)}, \quad f_{Z_1}(z_1) > 0, z_2 > 0.$$

Distribusi gabungan  $Z_1, Z_2$  adalah

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = f_{X_1, X_2}(z_1, z_2 - z_1), \quad 0 < z_1 < z_2 < \infty.$$

dengan distribusi  $f_{X_1, X_2}(z_1, z_2 - z_1)$  merupakan distribusi lognormal bivariat. Secara umum distribusi bersyarat dari  $Z_l|Z_j$ , untuk  $l > j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , dan  $l = 3, 4, \dots$ , adalah seperti pada Persamaan (IV.4), adapun distribusi gabungan dari  $Z_j, Z_l$  adalah

$$f_{Z_j, Z_l}(z_j, z_l) = \int_0^{z_2} \cdots \int_{z_{j-2}}^{z_j} \int_{z_j}^{z_{j+2}} \cdots \int_{z_{l-2}}^{z_l} f_{Z_1, \dots, Z_j, \dots, Z_l}(z_1, \dots, z_j, \dots, z_l) dz_{l-1} \cdots dz_{j+1} dz_{j-1} \cdots dz_1,$$

$$; 0 < z_j < z_l.$$

sedangkan

$$f_{Z_1, \dots, Z_j, \dots, Z_l}(z_1, \dots, z_j, \dots, z_l) = f_{X_1, \dots, X_j, \dots, X_l}(z_1, \dots, z_j - z_{j-1}, \dots, z_l - z_{l-1}),$$

$$; 0 < z_1 < \cdots < z_j < \cdots < z_l < \infty,$$

dengan distribusi  $f_{X_1, \dots, X_j, \dots, X_l}$  merupakan lognormal multivariat.

Dengan demikian ekspektasi bersyarat dari  $Z_N | Z_j, N > j, j = 0, 1, \dots$ , adalah

$$\begin{aligned} E(Z_N | Z_j, N > j) &= \sum_{l>j} E(Z_N | Z_j = z_j, N = l) p_{N|N>j}(l | N > j) \\ &= \sum_{l>j} E(Z_l | Z_j = z_j) p_{N|N>j}(l | N > j), \end{aligned} \quad (IV.5)$$

dengan ekspektasi dari  $Z_l | Z_j, l > j, j = 0, 1, \dots$ , adalah

$$E(Z_l | Z_j = z_j) = \int_0^{\infty} z_l f_{Z_l | Z_j}(z_l | z_j) dz_l = \int_0^{\infty} z_l \frac{f_{Z_j, Z_l}(z_j, z_l)}{f_{Z_j}(z_j)} dz_l, \quad z_l > 0.$$

Berdasarkan ekspektasi bersyarat dari  $Z_N | Z_j, N > j, j = 0, 1, \dots$ , yang telah dibangun di atas, maka dapat dihitung estimasi total utang klaim. Estimasinya dihitung dengan menggunakan Persamaan (IV.3), dengan taksiran ekspektasi  $E[Z_{N,l}^u | Z_{j,l}^u = z_{j,l}^u, N_l > j_l]$  dihitung menggunakan Persamaan (IV.5). Terlihat bahwa hasil estimasi total utang klaimnya tergantung pada taksiran parameter distribusi lognormal multivariat dari pembayaran-pembayaran klaim, taksiran

parameter distribusi lognormal univariat hasil aproksimasi distribusi untuk total pembayaran sampai pembayaran ke- $j$ , serta taksiran parameter distribusi  $N$ .

### IV.3 Kinerja Metode-metode Estimasi Utang Klaim

Simulasi Monte Carlo akan digunakan untuk memeriksa kinerja metode-metode estimasi utang klaim yang dibahas dalam subbab sebelumnya. Ada tiga metode yang bersifat kasar untuk estimasi utang klaim, yaitu metode  $ETUK_{MM}$ ,  $ETUK_{MP1}$ , dan  $ETUK_{MP2}$ . Sedangkan satu lagi adalah metode yang melibatkan distribusi bersyarat dari total pembayaran untuk suatu klaim (metode  $ETUK_{MP3}$ ). Sayangnya metode yang melibatkan distribusi bersyarat ini masih sulit untuk diimplementasikan dalam simulasi Monte Carlo yang jumlah simulasinya banyak. Oleh karena itu studi simulasi dengan jumlah simulasi yang banyak akan dilakukan untuk metode-metode estimasi utang klaim yang bersifat kasar. Sedangkan jumlah simulasi yang sedikit akan dilakukan untuk memeriksa kinerja semua metode estimasi termasuk metode  $ETUK_{MP3}$ .

Simulasi Monte Carlo juga akan digunakan untuk melihat perbandingan kinerja antara metode-metode estimasi yang dibahas dalam disertasi ini dengan metode chain ladder (MCL). MCL merupakan metode yang paling populer dan sering digunakan untuk estimasi utang klaim. Simulasi akan digunakan untuk memeriksa pengaruh distribusi frekuensi pembayaran, total jumlah klaim, dan kovariat dari klaim terhadap hasil estimasi utang klaim. Penilaian kinerja dari metode estimasi utang klaim akan didasarkan pada rata-rata dan galat baku (*standard error*) dari persentase penyimpangan hasil estimasi utang klaim. Mutaqin dkk. (2008c, dan 2008d) telah membahas algoritma untuk membangkitkan data klaim untuk asuransi kelas bisnis *long-tail*. Dengan menggunakan hasil penelitian dari Mutaqin dkk. (2008c, dan 2008d), tahapan studi simulasi dengan jumlah simulasi yang banyak (1.000) adalah sebagai berikut:

1. Bangkitkan waktu klaim dari distribusi seragam kontinu,  $U(0,10)$ .
2. Bangkitkan kovariat untuk klaim dari distribusi Bernoulli,  $B(0,5)$ .
3. Bangkitkan frekuensi pembayaran,  $N$ , dari distribusi diskrit.

4. Bangkitkan waktu pembayaran-pembayaran dari distribusi kontinu sepanjang selang  $(0, 10)$ .
5. Bangkitkan besarnya pembayaran-pembayaran,  $X_1, \dots, X_N$ , dari distribusi lognormal multivariat.
6. Ulangi Tahap 1 sampai 5 sebanyak  $m + d$  kali (total jumlah klaim).
7. Hitung total utang klaim simulasi.
8. Pisahkan data klaim yang telah diselesaikan dengan data klaim yang belum diselesaikan.
9. Hitung estimasi total utang klaim menggunakan metode  $ETUK_{MM}$ ,  $ETUK_{MP1}$ , dan  $ETUK_{MP2}$ , dengan dan tanpa melibatkan kovariat.
10. Hitung estimasi total utang klaim menggunakan metode MCL.
11. Hitung persentase penyimpangan hasil estimasi dari metode  $ETUK_{MM}$ ,  $ETUK_{MP1}$ ,  $ETUK_{MP2}$ , dan MCL terhadap total utang klaim simulasi.
12. Ulangi Tahap 1 sampai 11 sebanyak 1.000 kali.
13. Hitung rata-rata dan galat baku dari persentase penyimpangan hasil estimasi utang klaim.

Ada tiga distribusi yang dipertimbangkan untuk frekuensi pembayaran,  $N$ , dan semuanya mempunyai ruang sampel berhingga. Hal ini terkait dengan keterbatasan aspek komputasi dalam simulasi. Ketiga distribusi tersebut adalah seragam diskrit,  $DU(1,5)$ , dan dua distribusi berikut

$$p_N(l) = \begin{cases} 1/16 & ; l = 1, 5, \\ 4/16 & ; l = 2, 4, \\ 6/16 & ; l = 3, \end{cases} \quad (IV.6)$$

dan

$$p_N(l) = \begin{cases} 1/15 & ; l = 1, \\ 2/15 & ; l = 2, \\ 3/15 & ; l = 3, \\ 4/15 & ; l = 4, \\ 5/15 & ; l = 5. \end{cases} \quad (IV.7)$$

Distribusi yang ada pada Persamaan (IV.6) bentuknya simetri, dengan frekuensi pembayaran yang kecil ( $l = 1$ ) dan yang besar ( $l = 5$ ) peluangnya kecil dibandingkan dengan frekuensi pembayaran yang menengah ( $l = 2, 3, 4$ ). Distribusi frekuensi klaim yang ada pada Persamaan (IV.7) bentuknya menaik mulai dari frekuensi pembayaran yang kecil hingga yang besar.

Dalam kebanyakan kelas bisnis asuransi *long-tail*, pembayaran-pembayaran klaim cenderung terkonsentrasi secara berat menuju tanggal penyelesaian klaim. Untuk itu dalam simulasi ini, distribusi yang dipertimbangkan untuk waktu pembayaran adalah menaik secara linier yaitu

$$f(t) = \frac{5 + t}{100}; \quad 0 < t < 10.$$

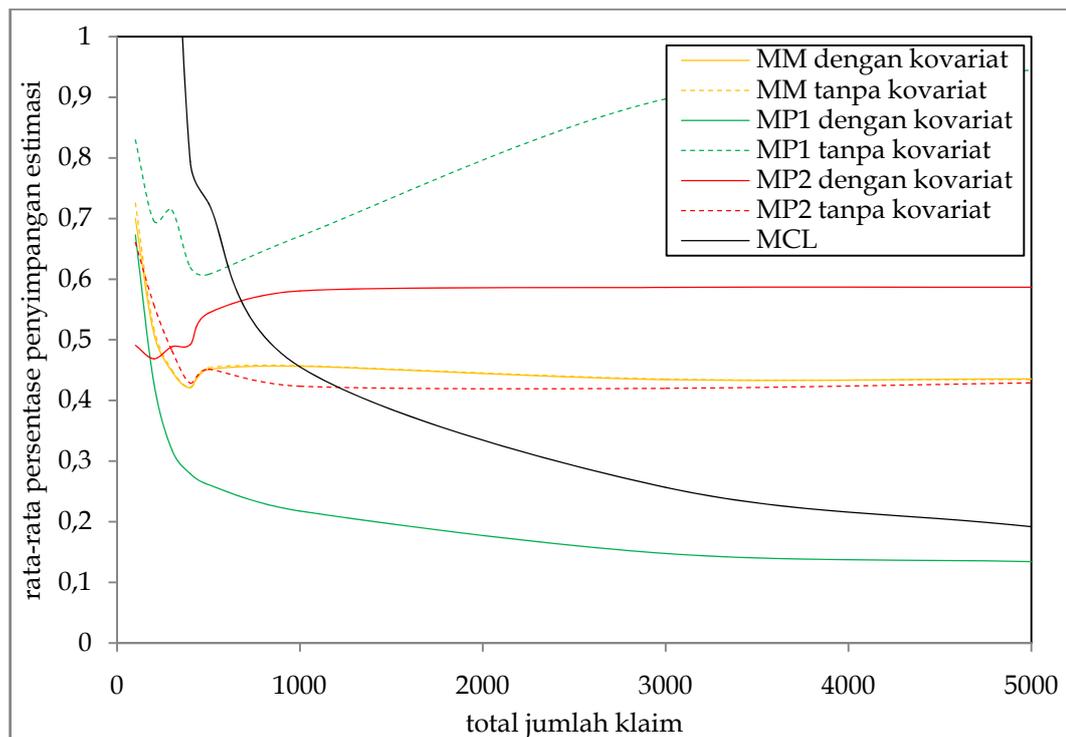
Tabel IV.1. Nilai-nilai parameter untuk distribusi besarnya pembayaran

Kovariat	Nilai parameter distribusi lognormal multivariat				
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
0	$\theta_1 = 3;$ $\lambda_{1,1} = 1$	$\theta_2 = 3\sqrt{2};$ $\lambda_{2,2} = 1$	$\theta_3 = 3\sqrt{3};$ $\lambda_{3,3} = 1$	$\theta_4 = 3\sqrt{4};$ $\lambda_{4,4} = 1$	$\theta_5 = 3\sqrt{5};$ $\lambda_{5,5} = 1$
1	$\theta_1 = 5;$ $\lambda_{1,1} = 1$	$\theta_2 = 5\sqrt{2};$ $\lambda_{2,2} = 1$	$\theta_3 = 5\sqrt{3};$ $\lambda_{3,3} = 1$	$\theta_4 = 5\sqrt{4};$ $\lambda_{4,4} = 1$	$\theta_5 = 5\sqrt{5};$ $\lambda_{5,5} = 1$

Tabel IV.1 menampilkan nilai-nilai parameter untuk distribusi besarnya pembayaran, dengan korelasi antar pembayaran adalah sama yaitu 0,5.

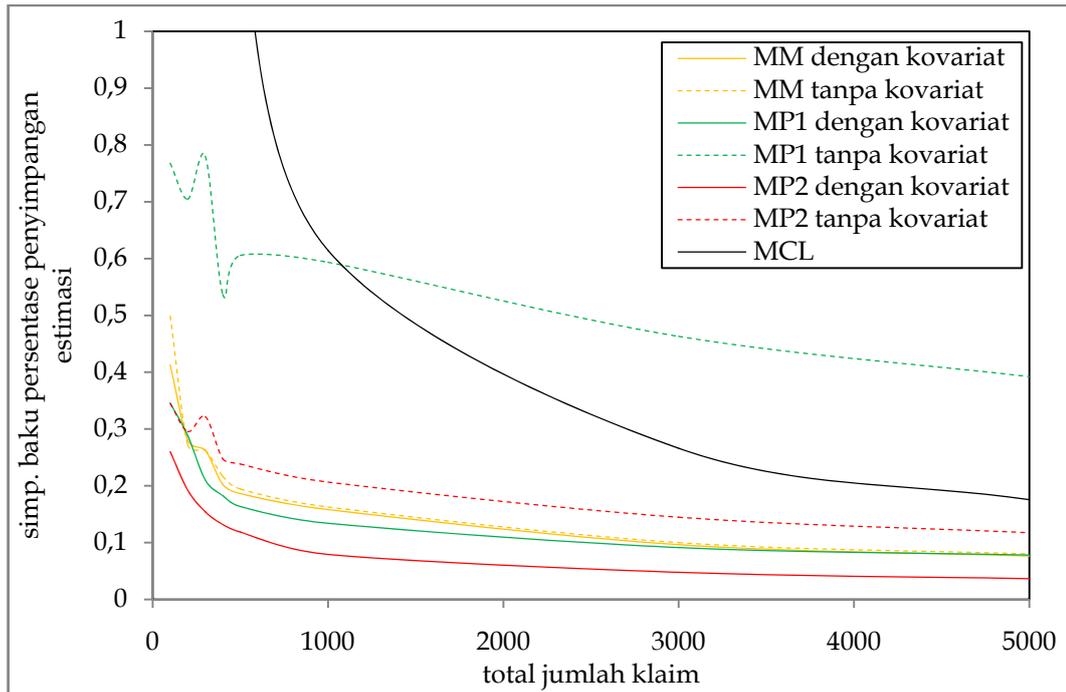
Total jumlah klaim yang dicobakan adalah  $m + d = 100, 200, 300, 400, 500, 1.000, 3.000, 5000$ . Gambar IV.1 sampai IV.6 menampilkan hasil simulasi Monte Carlo yang dilakukan. Gambar IV.1, IV.3, dan IV.5 menampilkan perbandingan rataan persentase penyimpangan hasil estimasi utang klaim dari metode  $ETUK_{MM}$ ,  $ETUK_{MP1}$ ,  $ETUK_{MP2}$ , dan MCL terhadap total utang klaim simulasi masing-masing untuk kasus frekuensi pembayaran berdistribusi  $DU(1,5)$ , Persamaan (IV.6), dan (IV.8). Gambar IV.2, IV.4, dan IV.6 menampilkan perbandingan simpangan baku persentase penyimpangan hasil estimasi utang klaim dari metode  $ETUK_{MM}$ ,  $ETUK_{MP1}$ ,  $ETUK_{MP2}$ , dan MCL terhadap total utang klaim

simulasi masing-masing untuk kasus frekuensi pembayaran berdistribusi  $DU(1,5)$ , Persamaan (IV.6) dan (IV.8). Lampiran C menampilkan nilai aktual untuk rata-rata dan simpangan baku persentase penyimpangan hasil estimasi utang klaim dari metode  $ETUK_{MM}$ ,  $ETUK_{MP1}$ ,  $ETUK_{MP2}$ , dan MCL terhadap total utang klaim simulasi untuk ketiga kasus distribusi frekuensi pembayaran.

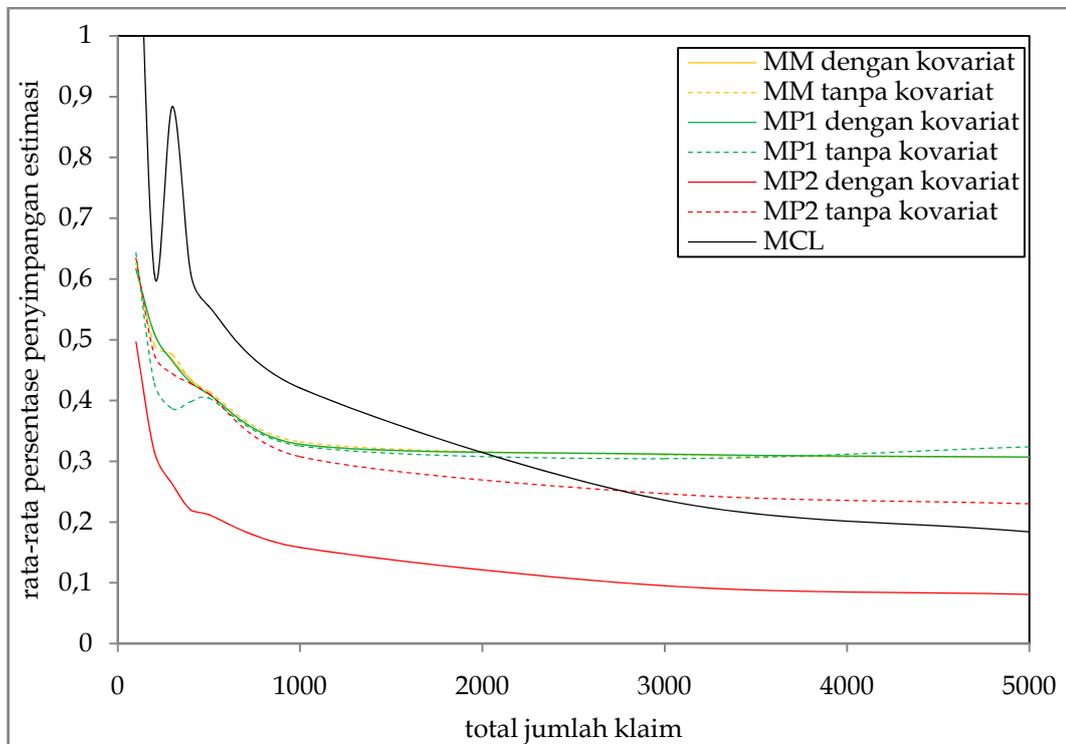


Gambar IV.1. Perbandingan rata-rata persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran berdistribusi  $DU(1,5)$

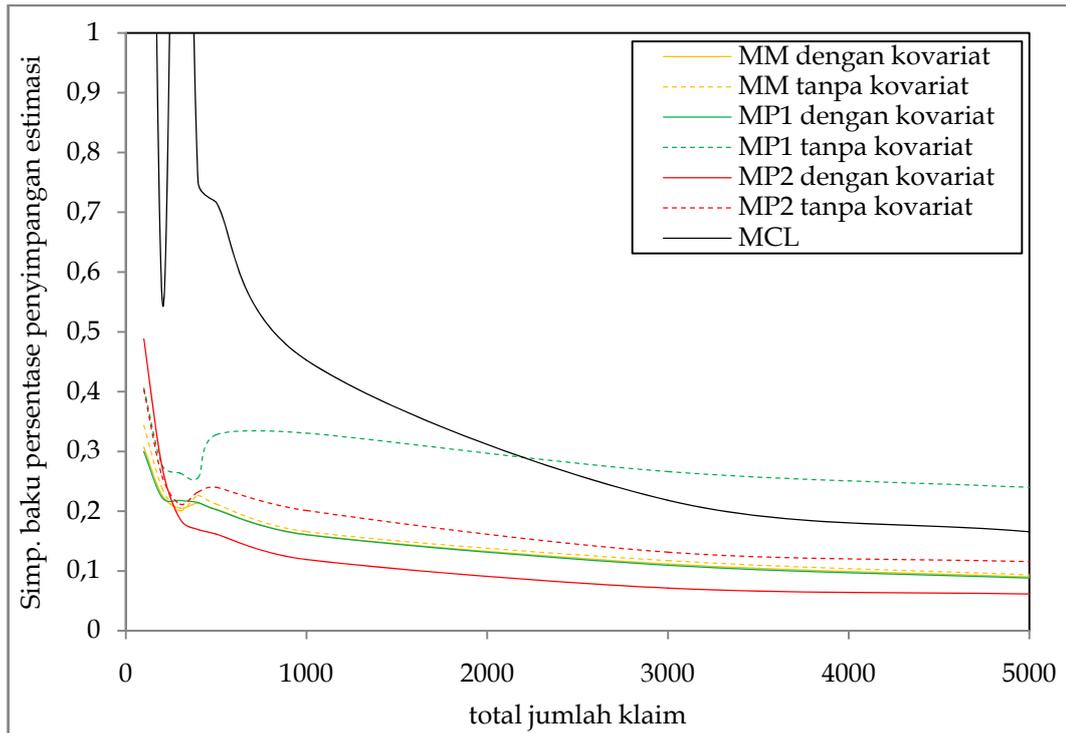
Untuk kasus distribusi frekuensi pembayaran konstan (seragam), metode parametrik dengan melibatkan kovariat merupakan metode yang paling akurat untuk mengestimasi utang klaim. Lebih khusus lagi, metode parametrik  $ETUK_{MP1}$  dengan melibatkan kovariat merupakan metode yang paling akurat untuk total jumlah klaim lebih dari atau sama dengan 200. Sedangkan untuk total jumlah klaim kurang dari 200, metode parametrik  $ETUK_{MP2}$  dengan melibatkan kovariat merupakan metode yang terbaik. Selain itu metode  $ETUK_{MP2}$  dengan melibatkan kovariat memiliki presisi yang bagus untuk berapapun total jumlah klaimnya.



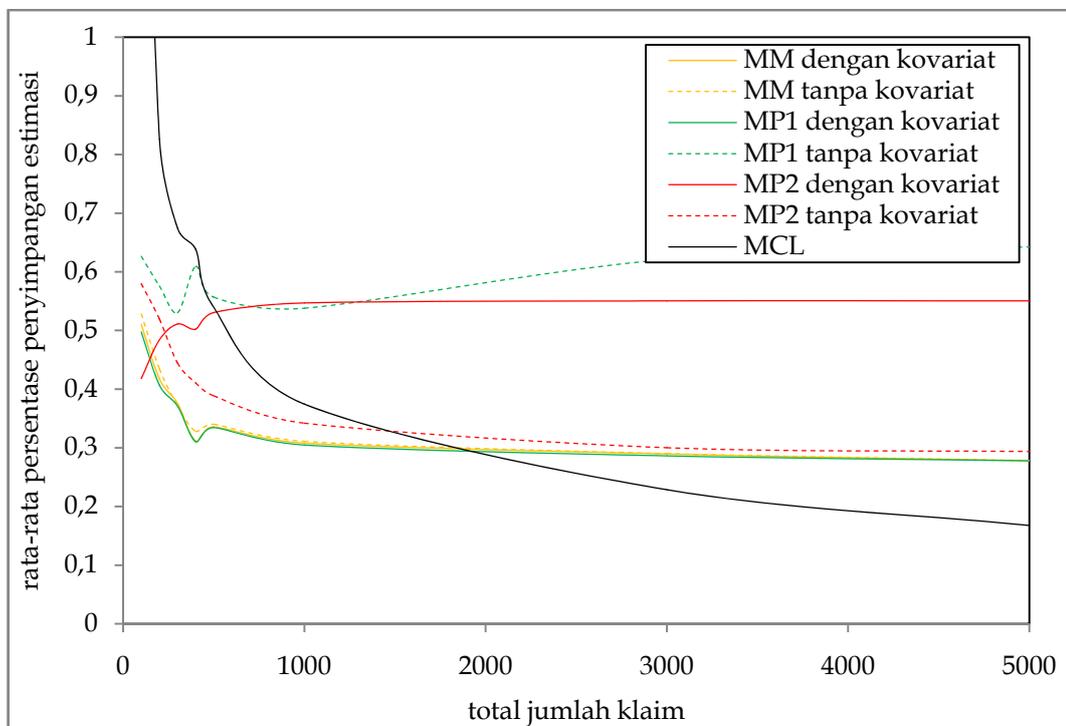
Gambar IV.2. Perbandingan simpangan baku persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran berdistribusi  $DU(1,5)$



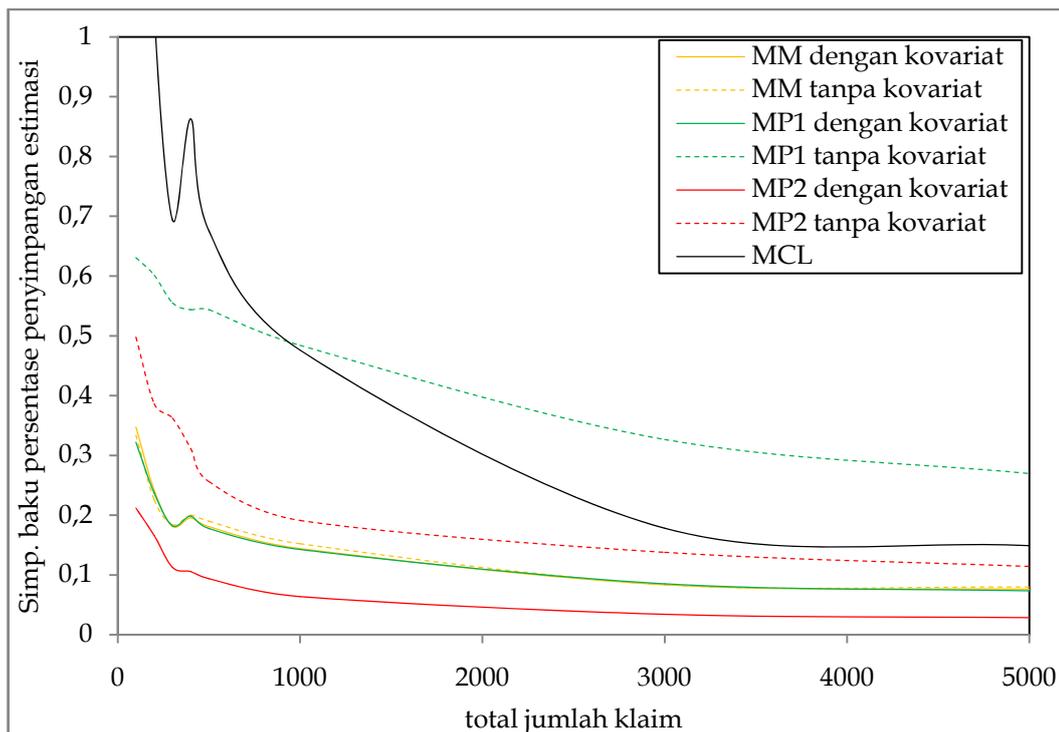
Gambar IV.3. Perbandingan rata-rata persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran berdistribusi seperti Persamaan (IV.6)



Gambar IV.4. Perbandingan simpangan baku persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran berdistribusi seperti Persamaan (IV.6)



Gambar IV.5. Perbandingan rata-rata persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran berdistribusi seperti Persamaan (IV.7)



Gambar IV.6. Perbandingan simpangan baku persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran berdistribusi seperti Persamaan (IV.7)

Metode parametrik  $ETUK_{MP2}$  dengan melibatkan kovariat merupakan metode yang paling akurat untuk mengestimasi utang klaim pada kasus bentuk distribusi frekuensi pembayarannya menaik kemudian menurun untuk berapapun total jumlah klaimnya. Lebih khusus lagi, metode di atas merupakan metode terbaik untuk kasus total jumlah klaim lebih dari atau sama dengan 300.

Metode parametrik dengan melibatkan kovariat menjadi metode yang paling akurat untuk mengestimasi utang klaim pada kasus bentuk distribusi frekuensi pembayaran menaik, kecuali untuk total jumlah klaim lebih dari atau sama dengan 2.000. Metode parametrik  $ETUK_{MP1}$  dengan melibatkan kovariat merupakan metode yang paling akurat untuk total jumlah klaim antara 200 sampai 1.000. Sedangkan metode parametrik  $ETUK_{MP2}$  merupakan metode yang terbaik untuk total jumlah klaim 100.

Metode yang bersifat agregat, MCL, lebih akurat dibandingkan dengan metode lain untuk mengestimasi utang klaim untuk kasus total jumlah klaim lebih dari atau sama dengan 2.000 dan bentuk distribusi frekuensi pembayarannya menaik.

Dari hasil simulasi di atas, terlihat bahwa kovariat sangat penting untuk diperhatikan, karena hasil simulasi menunjukkan bahwa tidak ada satu metodepun yang tanpa kovariat yang lebih bagus dibandingkan dengan metode yang lainnya.

Tabel IV.2 menampilkan hasil simulasi untuk kinerja semua metode estimasi utang klaim termasuk metode  $ETUK_{MP3}$ . Hasil ini didasarkan pada simulasi yang dilakukan sebanyak 5 kali, dengan frekuensi pembayarannya berdistribusi seragam diskrit,  $DU(1,4)$ . Terlihat bahwa metode  $ETUK_{MP3}$  yang melibatkan kovariat merupakan metode estimasi utang klaim yang paling akurat. Sedangkan metode  $ETUK_{MM}$  yang melibatkan kovariat merupakan metode yang memiliki presisi yang baik. Namun demikian, perlu dilakukan studi lebih lanjut lagi dengan menambahkan jumlah simulasi untuk memperoleh hasil yang dapat dipertanggungjawabkan. Secara teori, metode  $ETUK_{MP3}$  lebih baik dibandingkan dengan metode parametrik lain karena melibatkan distribusi bersyarat.

Tabel IV.2. Hasil simulasi untuk semua metode estimasi

Metode	Kovariat	Persentase penyimpangan estimasi					Rataan	Simpangan baku
		1	2	3	4	5		
MM	Ya	0,589	0,560	0,628	0,694	0,464	0,587	<b>0,085</b>
	Tidak	0,572	0,562	0,711	0,656	0,375	0,575	0,128
MP1	Ya	0,409	0,154	0,474	0,421	0,196	0,331	0,145
	Tidak	0,130	0,267	0,430	0,194	0,764	0,357	0,254
MP2	Ya	0,072	0,430	0,133	0,548	0,071	0,251	0,223
	Tidak	0,554	0,644	0,694	0,656	0,156	0,541	0,221
MCL		0,165	0,229	0,130	0,373	0,750	0,329	0,253
MP3	Ya	0,110	<b>0,005</b>	<b>0,007</b>	<b>0,160</b>	<b>0,374</b>	<b>0,131</b>	0,151
	Tidak	<b>0,010</b>	0,212	0,643	0,483	1,267	0,523	0,482

#### **IV.4 Aplikasi Metode Estimasi Utang Klaim pada Data Nyata**

Subbab ini membahas penerapan metode-metode estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail* yang diusulkan dalam disertasi ini pada data nyata. Data yang digunakan adalah data klaim produk asuransi tanggung gugat, yaitu asuransi *personal injury* (De Jong dan Heller, 2008). Asuransi *personal injury* adalah suatu asuransi yang memberikan jaminan kepada pemegang polis karena mengalami kecelakaan di rumah, di luar rumah, atau di tempat kerja.

Subbab ini dibagi menjadi dua bagian. Bagian pertama berisikan uraian singkat tentang data klaim asuransi *personal injury* dan analisis pendahuluan sebelum dilakukan estimasi utang klaim. Sedangkan bagian kedua membahas aplikasi metode-metode estimasi utang klaim yang dibahas dalam disertasi ini pada data klaim asuransi *personal injury*.

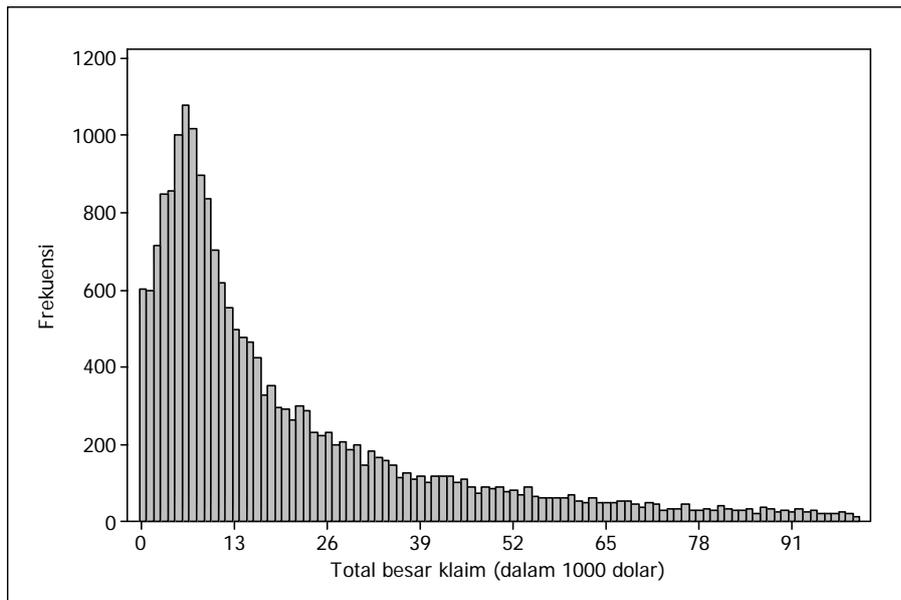
##### **IV.4.1 Data Klaim Asuransi *Personal Injury* dan Hasil Analisis Statistik**

Data klaim asuransi *personal injury* yang ada dalam De Jong dan Heller (2008) memuat informasi mengenai 22.036 klaim asuransi *personal injury* yang telah diselesaikan. Klaim-klaim tersebut dilaporkan selama periode Juli 1989 sampai Juni 1999. Informasi peubah-peubah yang ada dalam data tersebut diantaranya adalah total besar klaim (dalam dolar), penggunaan penasihat hukum (ya atau tidak), bulan terjadinya kerugian yang dialami pemegang polis (bulan kejadian), bulan dilaporkannya kerugian kepada perusahaan asuransi (bulan pelaporan), dan bulan klaim asuransi diselesaikan (bulan penyelesaian).

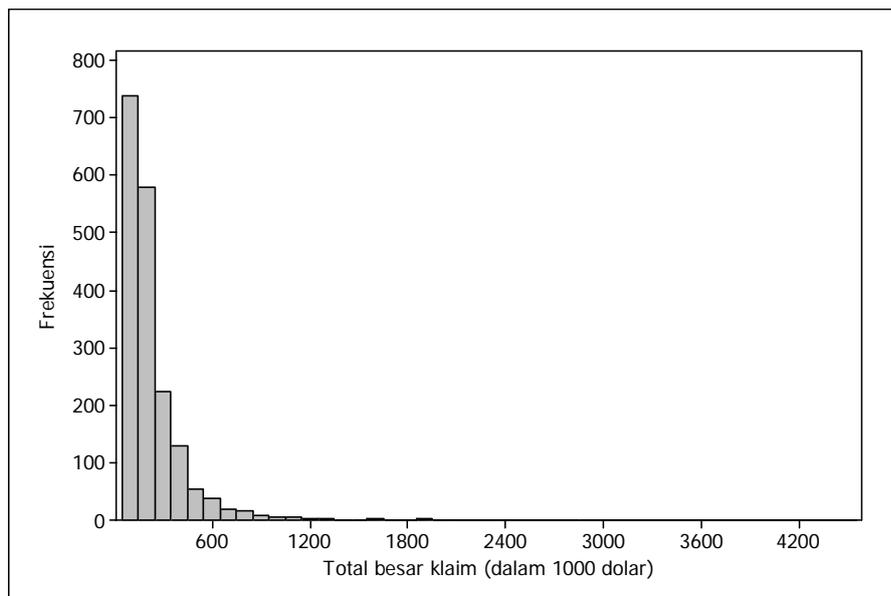
Data klaim asuransi *personal injury* berbentuk data individu namun tidak rinci karena tidak mencantumkan berapa kali suatu klaim dibayarkan dan berapa besar masing-masing pembayaran, yang ada hanya total pembayaran untuk suatu klaim. Tabel IV.3 menyajikan nilai-nilai statistik untuk data total besar klaim asuransi *personal injury* dengan dan tanpa peubah penasihat hukum.

Tabel IV.3. Nilai-nilai statistik untuk data total besar klaim

		Rataan	Simpangan baku	Nilai Minimum	Nilai maksimum
Seluruh pengamatan		38.367,22	90.981,11	9,96	4.485.797,21
Penasihat hukum	Ya	41.775,04	97.541,38	20,15	4.485.797,21
	Tidak	32.397,56	77.820,33	9,96	2.798.362,21



(a) berdasarkan data total besar klaim yang  $\leq$  \$100.000



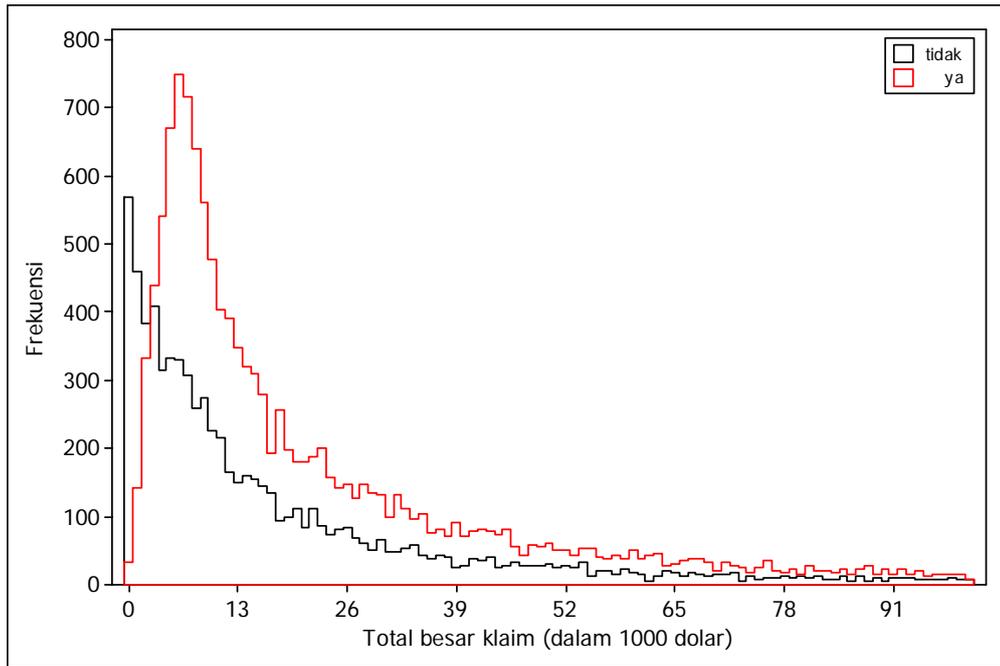
(b) berdasarkan data total besar klaim yang  $>$  \$100.000

Gambar IV.7. Histogram data total besar klaim tanpa penggunaan penasihat hukum

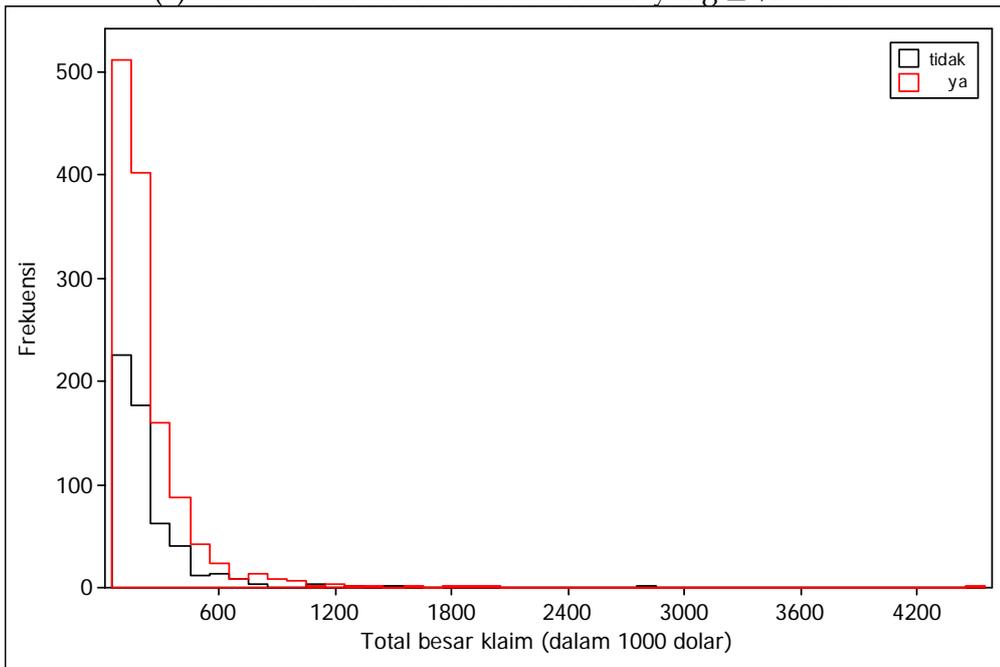
Gambar IV.7 dan IV.8 menampilkan histogram untuk data total besar klaim asuransi *personal injury* dengan dan tanpa peubah penasihat hukum. Kedua gambar histogramnya dibagi dua bagian (a dan b) untuk melihat dengan jelas bentuk dari histogramnya. Histogram yang ada pada Gambar IV.7(a) dan IV.8(a) dibentuk berdasarkan data total besar klaim yang lebih kecil atau sama dengan \$100.000 (sekitar 92% dari seluruh klaim). Histogram yang berwarna merah yang ada pada Gambar IV.8 didasarkan pada data total besar klaim yang menggunakan penasihat hukum, sedangkan histogram yang berwarna hitam didasarkan pada data yang tidak menggunakan penasihat hukum.

Berdasarkan nilai-nilai yang ada pada Tabel IV.3 dan dukungan histogram pada Gambar IV.8, diduga bahwa penggunaan penasihat hukum mempengaruhi nilai total besar klaim asuransi *personal injury*. Terlihat bahwa klaim yang menggunakan penasihat hukum (sekitar 64% dari seluruh klaim) mempunyai nilai rata-rata total besar klaim yang lebih besar dibandingkan dengan tanpa menggunakan penasihat hukum (sekitar 36% dari seluruh klaim). Hasil ini menunjukkan pentingnya memperhatikan peubah penggunaan penasihat hukum dalam melakukan estimasi utang klaim asuransi *personal injury*. Dalam subbab berikutnya peubah penggunaan penasihat hukum ini akan dijadikan sebagai suatu kovariat yang mempengaruhi besar kecilnya hasil estimasi utang klaim asuransi *personal injury*.

Informasi lain yang dapat diperoleh dari Gambar IV.7 dan IV.8, baik dengan atau tanpa melibatkan penggunaan penasihat hukum, distribusi dari total besar klaim adalah miring ke kanan atau ekor dari distribusinya ada di kanan. Salah satu distribusi yang memiliki sifat seperti itu adalah distribusi lognormal. Diketahui bahwa total besar klaim merupakan jumlah kumulatif pembayaran-pembayaran untuk suatu klaim. Hasil Mehta dkk. (2007) menunjukkan bahwa distribusi lognormal univariat merupakan pendekatan yang baik untuk distribusi dari jumlah tetap peubah-peubah lognormal yang berkorelasi. Dengan demikian diduga bahwa peubah-peubah pembayaran untuk suatu klaim berdistribusi lognormal multivariat. Dugaan ini akan dijadikan sebagai asumsi dalam melakukan estimasi utang klaim pada subbab berikutnya.



(a) berdasarkan data total besar klaim yang  $\leq$  \$100.000



(b) berdasarkan data total besar klaim yang  $>$  \$100.000

Gambar IV.8. Histogram data total besar klaim dengan penggunaan penasihat hukum

Dari data klaim asuransi *personal injury* diperoleh informasi bahwa waktu tunggu sejak klaim dilaporkan sampai klaim diselesaikan sangat bervariasi. Nilai minimumnya adalah 0 bulan (kurang dari satu bulan klaim sudah dapat diselesaikan), nilai maksimumnya adalah 68 bulan atau sekitar 5,7 tahun, dan rataannya adalah 17 bulan.

#### **IV.4.2 Estimasi Utang Klaim Asuransi *Personal Injury***

Data klaim asuransi *personal injury* yang telah dijelaskan di atas semuanya merupakan data klaim yang telah diselesaikan. Untuk melakukan estimasi utang klaim, data di atas nantinya akan dibagi dua kategori yaitu data klaim yang telah diselesaikan dan data klaim yang belum diselesaikan melalui proses simulasi Monte Carlo. Proses simulasi juga akan dilakukan untuk membangkitkan pembayaran-pembayaran suatu klaim karena data yang ada hanya memuat total besar klaim.

Diketahui bahwa maksimum waktu tunggu sejak klaim dilaporkan sampai klaim diselesaikan adalah 68 bulan. Berdasarkan informasi tersebut, diasumsikan bahwa semua klaim dapat diselesaikan dalam kurun waktu 72 bulan atau 12 semester. Asumsi lainnya adalah bahwa dengan maksimum 4 kali pembayaran, klaim asuransi *personal injury* dapat diselesaikan. Sementara itu, peubah penggunaan penasihat hukum akan dijadikan sebagai suatu kovariat yang mempengaruhi besar kecilnya estimasi utang klaim asuransi *personal injury* sebagaimana yang telah dijelaskan dalam subbab sebelumnya.

Adapun proses menghitung estimasi utang klaim asuransi *personal injury* dilakukan dengan tahapan sebagai berikut:

1. Bangkitkan waktu klaim dari distribusi seragam kontinu,  $U(0,12)$ .
2. Bangkitkan frekuensi pembayaran,  $N$ , dari distribusi diskrit.
3. Bangkitkan waktu pembayaran-pembayaran dari distribusi kontinu sepanjang selang  $(0, \text{waktu tunggu} + 1)$ , dengan waktu pembayaran yang terakhir dibuat sama dengan waktu penyelesaian klaim yang sebenarnya.

4. Bangkitkan besarnya pembayaran-pembayaran,  $X_1, X_2|X_1, \dots, X_N|X_1, \dots, X_{N-1}$ , dari distribusi lognormal.
5. Ulangi Tahap 1 sampai 4 sebanyak 22.036 kali (total jumlah klaim).
6. Hitung total utang klaim asuransi *personal injury* simulasi.
7. Pisahkan data klaim hasil simulasi menjadi dua kategori yaitu data klaim yang telah dan belum diselesaikan.
8. Hitung estimasi total utang klaim menggunakan metode  $ETUK_{MM}$ ,  $ETUK_{MP1}$ ,  $ETUK_{MP2}$ , dan  $ETUK_{MP3}$  dengan dan tanpa melibatkan kovariat.
9. Hitung estimasi total utang klaim menggunakan metode MCL.
10. Hitung persentase penyimpangan hasil estimasi dari metode  $ETUK_{MM}$ ,  $ETUK_{MP1}$ ,  $ETUK_{MP2}$ ,  $ETUK_{MP3}$ , dan MCL terhadap total utang klaim simulasi.

Distribusi seragam diskrit,  $DU(1,5)$  akan dipertimbangkan untuk frekuensi pembayaran,  $N$ . Sedangkan distribusi untuk waktu pembayaran adalah menaik secara linier yaitu

$$f(t) = \frac{1}{2T} + \frac{t}{T^2}; \quad 0 < t < T,$$

dengan  $T = \text{waktu tunggu} + 1$ . Nilai-nilai parameter untuk distribusi besarnya pembayaran-pembayaran adalah sama sebagaimana dalam Tabel IV.1.

Tabel IV.4. Hasil estimasi utang klaim asuransi *personal injury* untuk total klaim 22.036

Penasihat hukum	Metode				
	MM	MP1	MP2	MP3	MCL
Ya	0,5476	0,3561	0,6487	0,3121	<b>0,1324</b>
Tidak	0,5496	0,3255	0,7031	0,2643	

Tabel IV.5. Hasil estimasi utang klaim asuransi *personal injury* untuk total klaim 500

Penasihat hukum	Metode				
	MM	MP1	MP2	MP3	MCL
Ya	0,4909	0,1199	0,5713	<b>0,1022</b>	0,2247
Tidak	0,4946	0,1523	0,6672	0,1297	

Ada dua kasus yang akan dipertimbangkan untuk estimasi utang klaim. Kasus pertama adalah melibatkan seluruh klaim, yaitu 22.036. Kasus kedua adalah melibatkan jumlah klaim berukuran 500, yang diambil secara acak dari 22.036 total klaim yang ada. Persentase penyimpangan hasil estimasi utang klaim asuransi *personal injury* dengan melibatkan data klaim berukuran 22.036 dan 500 masing-masing disajikan dalam Tabel IV.4 dan IV.5. Untuk kasus pertama, hasil perhitungan menunjukkan bahwa metode chain ladder merupakan metode yang paling akurat untuk estimasi utang klaim asuransi *personal injury*. Hal ini sesuai dengan pernyataan para peneliti bahwa metode chain ladder cocok untuk kasus jumlah klaim yang banyak. Sedangkan untuk kasus kedua, terlihat bahwa metode parametrik  $ETUK_{MP3}$  dengan melibatkan peubah penasihat hukum yang paling akurat.

## Bab V Kesimpulan

Secara garis besar, disertasi ini telah memberikan dua kontribusi. Pertama, dalam disertasi ini telah dibangun teori yang berkaitan dengan jumlah acak dari peubah-peubah acak berkorelasi (jumlah acak berkorelasi - JAK). Kedua, dalam disertasi ini telah dibangun metode baru untuk estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail* menggunakan JAK.

Jumlah acak dari peubah-peubah acak saling bebas telah banyak dibahas oleh para peneliti. Begitu juga teori yang berkaitan dengan jumlah tetap dari peubah-peubah acak berkorelasi. Dalam disertasi ini dilakukan perluasan teori jumlah acak dengan mempertimbangkan bahwa peubah-peubah acaknya berkorelasi. Hasil-hasil penelitian dalam disertasi ini yang terkait dengan teori JAK adalah sebagai berikut:

1. Dengan menetapkan beberapa asumsi, dapat diformulasikan mean dan variansi dari JAK.
2. Penghitungan mean dan variansi dari JAK yang bersifat parametrik telah dibuat dengan mengasumsikan bahwa distribusi jumlah tetap dari peubah-peubah acak berkorelasinya adalah lognormal multivariat, dan jumlahnya mengikuti distribusi diskrit tertentu. Jumlah acak ini diberi nama jumlah acak lognormal berkorelasi (JALNK).
3. Aproksimasi distribusi dari JALNK telah diturunkan yang hasilnya merupakan campuran dari distribusi lognormal univariat. Karakteristik dari distribusi tersebut seperti mean, variansi dan persentil juga telah diturunkan secara analitik.
4. Dalam disertasi ini telah diusulkan dua metode penaksiran parameter distribusi JALNK, yaitu metode *likelihood* maksimum terpisah (MLMP) dan metode momen diperumum (*generalized moment method* - MMU). Hasil simulasi menunjukkan bahwa secara umum MLMP lebih baik dibandingkan dengan MMU diperbarui kontinu karena memiliki bias dan RKK yang lebih kecil. Di lain pihak, kedua metode konsisten dalam menaksir parameter-parameter distribusi eksak JALNK.

5. Tiga pendekatan telah diturunkan untuk menaksir mean dan variansi dari JALNK. Pendekatan pertama bersifat nonparametrik, yaitu menggunakan prinsip penaksiran metode momen (MM). Pendekatan kedua bersifat parametrik yang dibangun dengan prinsip *plug-in* dan memanfaatkan PLM dari distribusi lognormal multivariat dan parameter dari distribusi  $N$  (MP1). Pendekatan ketiga bersifat parametrik didasarkan pada mean dan variansi dari aproksimasi distribusi dari JALNK (MP2). Disertasi ini juga telah menunjukkan bahwa taksiran mean dengan MP1 dari distribusi *compound* binomial-lognormal berkorelasi dan distribusi *compound* Poisson-lognormal berkorelasi merupakan penaksir yang tak-bias asimtotik.
6. Hasil simulasi Monte Carlo ketika  $N$  berdistribusi seragam diskrit menunjukkan bahwa: (1) untuk ukuran sampel  $m \leq 15$  dan  $m \geq 500$ , metode MP1 lebih baik dibandingkan dengan metode lainnya dalam menaksir mean JALNK. Sedangkan untuk ukuran sampel  $15 < m \leq 100$ , tidak ada satu pun metode yang terbaik. (2) Metode MP1 merupakan metode yang terbaik untuk menaksir variansi JALNK pada kasus  $30 \leq m \leq 500$  karena memiliki bias dan RKK yang kecil. Sedangkan untuk ukuran sampel lainnya tidak ada satu pun metode yang terbaik. (3) Semua metode penaksiran mean dan variansi JALNK konsisten.
7. Hasil simulasi Monte Carlo ketika  $N$  berdistribusi binomial menunjukkan bahwa: (1) Metode MP1 lebih baik dibandingkan dengan metode lainnya dalam menaksir mean JALNK. (2) Metode MM merupakan metode yang terbaik untuk menaksir variansi JALNK pada kasus  $m < 30$ . Sementara itu untuk kasus  $30 \leq m \leq 500$  metode MP1 merupakan metode yang terbaik untuk menaksir variansi JALNK. Sedangkan untuk ukuran sampel lainnya tidak ada satu pun metode yang terbaik. (3) Semua metode penaksiran mean dan variansi JALNK konsisten.
8. Hasil simulasi Monte Carlo ketika  $N$  berdistribusi Poisson menunjukkan bahwa: (1) Tidak ada satu pun metode yang terbaik untuk menaksir mean JALNK. (2) Metode MM merupakan metode yang terbaik untuk

menaksir variansi JALNK untuk semua kasus ukuran sampel yang dicobakan. (3) Semua metode penaksiran mean dan variansi JALNK konsisten, kecuali metode penaksiran MP1 untuk variansi.

9. Dengan menggunakan prinsip *plug-in*, telah diturunkan taksiran aproksimasi distribusi dari JALNK, juga karakteristik distribusinya seperti mean, variansi, dan persentil. Hasil simulasi Monte Carlo menunjukkan bahwa taksiran aproksimasi distribusi dari JALNK yang diusulkan secara statistik tidak berbeda dengan distribusi eksaknya untuk berapapun ukuran sampelnya, dan nilai koefisien korelasinya.

Dalam disertasi ini dibangun metode individu baru untuk estimasi utang klaim dalam bisnis asuransi *long-tail* menggunakan JAK. Metodenya melibatkan distribusi dari frekuensi pembayaran, distribusi dari besarnya pembayaran-pembayaran, dan korelasi antar besarnya pembayaran untuk suatu klaim. Total besarnya pembayaran untuk suatu klaim diasumsikan sebagai JALNK. Hasil-hasil penelitian dalam disertasi ini yang terkait dengan estimasi utang klaim tersebut adalah:

1. Secara umum ada dua metode estimasi utang klaim yang telah dibangun. Pertama metode yang bersifat kasar yang didasarkan pada ekspektasi dari JALNK. Metode pertama ini ada yang didasarkan pada metode momen ada yang parametrik. Metode kedua yang merupakan metode parametrik yang didasarkan pada distribusi bersyarat dari total pembayaran klaim.
2. Hasil simulasi Monte Carlo menunjukkan bahwa metode parametrik dengan melibatkan kovariat merupakan metode yang lebih akurat untuk estimasi utang klaim baik untuk frekuensi pembayaran berdistribusi seragam ataupun ketika bentuk distribusi frekuensi pembayarannya menaik kemudian menurun.
3. Hasil simulasi Monte Carlo menunjukkan bahwa metode parametrik dengan melibatkan kovariat menjadi metode yang lebih akurat untuk estimasi utang klaim pada kasus bentuk distribusi frekuensi

pembayaran menaik, kecuali untuk total jumlah klaim lebih dari atau sama dengan 3.000.

4. Hasil simulasi Monte Carlo menunjukkan bahwa metode agregat chain ladder lebih akurat dibandingkan dengan metode lain untuk estimasi utang klaim untuk kasus total jumlah klaim lebih dari atau sama dengan 2.000 dan bentuk distribusi frekuensi pembayarannya menaik.
5. Secara teori, metode parametrik yang melibatkan distribusi bersyarat lebih baik dalam estimasi utang klaim dibandingkan dengan metode parametrik lain. Hasil simulasi Monte Carlo juga menunjukkan bahwa metode parametrik ini yang lebih akurat. Namun demikian, perlu dilakukan studi lebih lanjut lagi dengan menambahkan jumlah simulasi untuk memperoleh hasil yang dapat dipertanggungjawabkan.
6. Hasil aplikasi metode-metode estimasi utang untuk data nyata mengenai klaim asuransi *personal injury* menunjukkan bahwa metode chain ladder menjadi metode yang lebih akurat untuk kasus ukuran klaim yang besar (22.036). Sedangkan untuk kasus ukuran klaim kecil (500), metode parametrik yang melibatkan distribusi bersyarat dengan melibatkan peubah penasihat hukum menjadi metode yang lebih akurat.

Ada beberapa masalah yang masih terbuka untuk dijadikan bahan penelitian ke depan baik yang berkaitan dengan teori JAK ataupun aplikasinya untuk estimasi utang klaim. Berikut ini masalah-masalah tersebut:

1. Membangun teori JALNK ketika  $N$  berdistribusi diskrit lainnya selain binomial dan Poisson, seperti geometrik, dan binomial negatif.
2. Perlu dicarikan penaksir lain untuk mean dan variansi dari JALNK yang bersifat tak bias, bervariansi minimum, dan konsisten.
3. Dalam disertasi ini diasumsikan bahwa besar pembayaran-pembayaran klaim berdistribusi lognormal multivariat. Perlu dikaji masalah estimasi utang klaim dengan asumsi bahwa besar pembayaran-pembayaran klaim berdistribusi eksponensial multivariat, gamma multivariat, atau Weibull multivariat.

4. Dalam disertasi ini korelasi antar pembayaran-pembayaran klaim ditetapkan 0,5. Perlu dilakukan kajian pengaruh korelasi antar pembayaran-pembayaran klaim terhadap hasil estimasi utang klaim untuk metode-metode yang diusulkan dalam disertasi ini.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abramowitz, M., dan Stegun, I. (1972): *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, edisi kesembilan, Dover.
- Atkins, G. (2001): The Role of Modeling Long Tail Classes of Business Risk in Managing Capital, *Proceedings of the 2001 Conference on Enhancing Shareholder Value through Capital Risk Management*, Sydney, Australia, Southwood Press Pty Ltd, 41–72.
- Barnett, G. dan Zehnwirth, B. (2000): Best Estimates for Reserves. *Proceedings of Casualty Actuarial Society (PCAS) LXXXVII*, 245-321.
- Brosius, E. (1992): Loss Development Using Credibility, *Casualty Actuarial Society Part 7 Exam Study Kit*, <http://www.casact.org/library/studynotes/brosius6.pdf>, diunduh pada 7 Oktober 2007.
- Casella, G., dan Berger, R.L. (1990): *Statistical Inference*, California, Brooks/Cole Publishing Company.
- Chatelain, F., Borgnat, P., Tourneret, J.-Y., Abry, P. (2008): Parameter Estimation for Sums of Correlated Gamma Random Variables Application to Anomaly Detection in Internet Traffic, *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP-08*, Las Vegas, 3489-3492.
- Conover, W.J. (1999): *Practical Nonparametric Statistics*, edisi kedua, New York, John Wiley.
- De Alba, E. (2006): Claim Reserving When There are Negative Values in Runoff Triangle: Bayesian Analysis Using the Three-Parameter Log-Normal Distribution, *North American Actuarial Journal*, **10**, 45–59.
- De Jong, P. (2006): Forecasting Runoff Triangle, *North American Actuarial Journal*, **10**, 28–38.
- De Jong, P., dan Heller, G.Z. (2008): *Generalized Linear Models for Insurance Data*, Cambridge, Cambridge University Press.
- England, P.D. dan Verrall, R.J. (2002): Stochastic Claims Reserving in General Insurance, <http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/sessional/sm0201.pdf>, diunduh pada 7 Oktober 2007.
- Finney, D. J. (1941): On the Distribution of a Variate whose Logarithm in Normally Distributed, *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, **7**, 155–161.

- Haastrup, S., dan Arjas, E. (1996): Claims Reserving in Continuous Time: A Nonparametric Bayesian Approach, *ASTIN BULLETIN*, **26**, 139–164.
- Hansen, L.P. (1982): Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators, *Econometrica*, **50**, 1029 – 1054.
- Hansen, L.P., Heaton, J., dan Yaron, A. (1996): Finite-Sample Properties of Some Alternative GMM Estimators, *Journal of Business & Economic Statistics*, **14**, 262 – 280.
- Hossack, I.B., Pollard, J.H., dan Zehnwirth, B. (1999): *Introductory Statistics with Applications in General Insurance*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Jewell, W.S. (1989): Predicting IBNYR Events and Delays. I. Continuous Time, *ASTIN BULLETIN*, **19**, 25–56.
- Jewell, W.S. (1990): Predicting IBNYR Events and Delays. II. Discrete Time, *ASTIN BULLETIN*, **20**, 93–111.
- Kaas, R., Dhaene, J., Goovaerts, M.J. (2000): Upper and Lower Bounds for Sums of Random Variables, *Insurance: Mathematics and Economics*, **27**, 151–168.
- Kleiber, C., dan Kotz, S. (2003): *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, New York, John Wiley & Sons.
- Klugman, S.A., Panjer, H.H., dan Willmot, G.E. (2004): *Loss Models: From Data to Decision*, New York, John Wiley & Sons.
- Kotz, S., Balakrishnan, N., dan Johnson, N.L. (2000): *Continuous Multivariate Distributions, Volume 1: Models and Applications*, New York, John Wiley & Sons.
- Law, A.M., dan Kelton, W.D. (2000): *Simulation Modeling and Analysis*, edisi ketiga, New York, McGraw-Hill.
- Mack, T. (1993): Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserves Estimates, *ASTIN BULLETIN*, **23**, 213–225.
- Mack, T. (1994): Which Stochastic Model is Underlying the Chain Ladder Method? *Insurance: Mathematics and Economics*, **15**, 133–138.
- McCullagh, P. dan Nelder, J.A. (1989): *Generalized Linear Models*, edisi kedua, London, Chapman and Hall.

- McGuire, G. (2007): Individual Claim Modelling of CTA Data, dipublikasikan pada Institute of Actuaries of Australia, dipresentasikan pada The Institute of Actuaries of Australia Xith Accident Compensation Seminar 1-4 April 2007, Melbourne, Australia, <http://www.actuaries.asn.au>, diunduh pada 12 Januari 2008.
- Mehta, N.B., Wu, J., Molisch, A.F., Zhang, J. (2007): Approximating a sum of random variables with a lognormal, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, **6**, 2690-2699.
- Mood, A.M., Graybill, F.A., Boes, D.C. (1974): *Introduction to the Theory of Statistics*, edisi ketiga, McGraw-Hill.
- Murphy, D.M. (1994): Unbiased Loss Development Factors, *Proceedings of Casualty Actuarial Society (PCAS) LXXXI*, 154-222.
- Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2008a): Run-off Triangle Data dan Permasalahannya, *Jurnal Statistika: Forum Teori dan Aplikasi Statistika*, **8**, 55–59.
- Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2008b): Chain Ladder Method as a Gold Standard to Estimate Loss Reserves, *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika Indonesia di Jurusan Matematika Fakultas MIPA UGM, Yogyakarta pada Tanggal 31 Mei 2008*, 356–364.
- Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2008c): Generating Claim Data of General Insurance Based on Collective Risk Model and Claim Process, *Proceedings of the Third International Conference on Mathematics and Statistics (ICOMS-3), Institut Pertanian Bogor, Indonesia, 5 – 6 August 2008*.
- Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2008d): Algoritma untuk Membangkitkan Data Klaim Asuransi Umum Kelas Bisnis Long-tail, *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNPAR, Bandung pada Tanggal 6 September 2008*, 194–196.
- Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2009a): Distribusi Outstanding Claim Liability Berdasarkan Data Klaim Individu: Studi Kasus di Asuransi Mobil, *Prosiding Seminar Nasional Matematika di Jurusan Matematika, Universitas Jember, Jember, pada Tanggal 28 Februari 2009*, 474–486.
- Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2009b): Distribution-Free Test for Stability on Run-off Triangle, *Proceedings of the Fifth International Conference on Mathematics, Statistics, and Their Applications (ICMSA), Universitas Andalas, Bukittinggi, Indonesia, 802–808*.

- Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., Darwis, S., dan Djojosingito, R.A. (2010a): The Moments of Sum of Correlated Random Variables, *Far East Journal of Theoretical Statistics*, **31**, 49–57.
- Mutaqin, A.K., Darwis, S., Tampubolon, D.R., dan Djojosingito, R.A. (2010b): Estimating Mean and Variance of Sum of Correlated Random Variables using Empirical Moments, *Advances and Applications in Statistics*, **16**, 65–81.
- Mutaqin, A.K., Darwis, S., Tampubolon, D.R., dan Djojosingito, R.A. (2011): Estimation of Outstanding Claims Liability Using Empirical Moments of Correlated Random Sum, *International Journal of Applied Mathematics & Statistics*, **23**, 26–38.
- Nielsen, H.B. (2005): Generalized Method of Moments Estimation, [http://www.econ.ku.dk/metrics/Econometrics2\\_05\\_II/LectureNotes/gmm.pdf](http://www.econ.ku.dk/metrics/Econometrics2_05_II/LectureNotes/gmm.pdf), diunduh pada 17 Oktober 2011.
- Olofsson, M. (2006): Stochastic Loss Reserving Testing the New Guidelines from the Australian Prudential Regulation Authority (APRA) on Swedish Portfolio Data Using a Bootstrap Simulation and Distribution-Free Method by Thomas Mack, <http://www.math.su.se/mathstat/reports/serieb/2006/rep13/report.pdf>, diunduh pada 7 Oktober 2007.
- Pinheiro, P.J.R., Andrade e Silva, J.M., Centeno, M.L. (2003): Bootstrap Methodology in Claim Reserving, *The Journal of Risk and Insurance*, **70**, 701–714.
- Phillips, R.D., Cummins, J.D., dan Allen, F. (1996): Financial Pricing of Insurance in the Multiple Line Insurance Company, <http://fic.wharton.upenn.edu/fic/papers/96/9609.pdf>, diunduh pada 11 Maret 2008.
- Taylor, G. dan McGuire, G. (2004): Loss Reserving with GLMs: a Case Study, Casualty Actuarial Society 2004 Discussion Paper Program, 327-392, Paper ini dipresentasikan pada CAS Spring 2004 Meeting, Colorado Spring, CO, May 16-19 2004. <http://www.casact.org/pubs/dpp/dpp04/04dpp327.pdf>, diunduh pada 24 Desember 2007.
- Taylor, G., McGuire, G., dan Greenfield, A. (2003): Loss Reserving: Past, Present and Future, Invited Lecture untuk the XXXIV ASTIN Colloquium, Berlin, 24-27 August 2003, diproduksi ulang pada The Research Paper Series of the Centre for Actuarial Studies, University of Melbourne. <http://www.economics.unimelb.edu.au/SITE/actwww/html/n0109.pdf>, diunduh pada 24 Desember 2007.
- Taylor, G., McGuire, G., dan Sullivan, J. (2006): Individual Claims Loss Reserving Conditioned by Case Estimates, [http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/library/taylor\\_reserving.pdf](http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/library/taylor_reserving.pdf), diunduh pada 26 Januari 2008.

Taylor, H.M. dan Karlin, S. (1994): *An Introduction to Stochastic Modeling*, edisi revisi, New York, Academic Press.

Wright, T.S. (1997): Probability Distribution of Outstanding Liability from Individual Payments Data, Institute of Actuaries Claims Reserving Manual, Section D7, <http://www.actuaries.org.uk>, diunduh pada 26 Januari 2008.

Wright, T.S. (2007): Using Individual Claim Data, dipresentasikan pada Stochastic Reserving Seminar. [http://www.actuaries.org.uk/data/assets/pdf\\_file/0011/103205/11\\_Wright.pdf](http://www.actuaries.org.uk/data/assets/pdf_file/0011/103205/11_Wright.pdf), diunduh pada 26 Januari 2008.

# LAMPIRAN

Lampiran A Hasil pendahuluan penakair MLMP dan MMU dua-tahap, iteratif, dan diperbarui kontinu untuk  $N$  berdistribusi  $\text{bin}(3;0,5)$ .

Tabel L.1 Hasil pendahuluan penaksir MLMP dan MMU untuk  $N \sim \text{bin}(3;0,5)$

Metode	Penaksir			
	$\hat{p}$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
MLMP	-0,0001	-0,0011	0,0235	-0,0272
	[0,0009]	[0,0107]	[0,0169]	[0,0736]
	0,460	0,680	0,700	0,820
MMU Dua-tahap	0,1083	-5,4034	4,3540	8,1216
	[0,1557]	[2.214,5405]	[574,1238]	[2.451,3931]
	0,940	0,920	1,000	0,980
MMU iteratif	0,0580	-3,2623	4,5729	9,5002
	[0,1460]	[2.309,7690]	[1.147,5187]	[2.513,9716]
	0,960	0,980	0,980	0,960
MMU diperbarui kontinu	0,0018	0,0034	0,0225	-0,0230
	[0,0010]	[0,0105]	[0,0170]	[0,0743]
	0,480	0,700	0,680	0,820

Nilai-nilai pada baris pertama, kedua, dan ketiga untuk setiap metode masing-masing menyatakan nilai bias, RKK dan ukuran konsistensi.

Tabel L.1 Lanjutan

Metode	Penaksir					
	$\hat{\lambda}_{1,1}$	$\hat{\lambda}_{1,2}, \hat{\lambda}_{2,1}$	$\hat{\lambda}_{1,3}, \hat{\lambda}_{3,1}$	$\hat{\lambda}_{2,2}$	$\hat{\lambda}_{2,3}, \hat{\lambda}_{3,2}$	$\hat{\lambda}_{3,3}$
MLMP	0,0236	0,0157	0,0196	0,0054	0,0037	-0,0493
	[0,0328]	[0,0281]	[0,1768]	[0,0378]	[0,2216]	[0,2554]
	0,740	0,900	0,900	0,840	0,960	0,940
MMU Dua-tahap	-1,7613	1,9783	1,0694	-2,8363	2,7775	-5,9777
	[33,7266]	[108,9622]	[16,6942]	[193,2767]	[389,7357]	[1.157,5792]
	0,980	0,960	1,000	1,000	0,960	0,980
MMU iteratif	-2,0313	2,0531	0,7339	-2,1597	3,6897	-6,2382
	[50,6573]	[112,2986]	[31,9749]	[194,3949]	[412,2264]	[1.198,0986]
	0,980	0,960	1,000	1,000	0,980	0,980
MMU diperbarui kontinu	0,0310	0,0199	0,0215	0,0135	0,0093	-0,0456
	[0,0352]	[0,0286]	[0,1783]	[0,0393]	[0,2285]	[0,2552]
	0,820	0,900	0,880	0,800	0,980	0,920

Nilai-nilai pada baris pertama, kedua, dan ketiga untuk setiap metode masing-masing menyatakan nilai bias, RKK dan ukuran konsistensi.

Lampiran B Bias dan RKK dari tiga penaksir mean dan variansi JALNK.

Tabel L.2. Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK\* untuk  $N \sim DU(1,5)$  dan  $\theta = 1$

m	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
5	1,7343 [61,2211]	-60,3766 [201.670,1282]	-1,0029 [36,2018]	363,3092 [8.769.877,0286]	4,1441 [108,7063]	670,7290 [12.687.853,9913]
9	1,6068 [32,4790]	-72,7012 [95.815,7579]	-0,6910 [19,0093]	58,9707 [2.149.445,3358]	2,9710 [46,9893]	153,2445 [533.878,5320]
13	0,8718 [20,7110]	-69,5002 [80.186,4191]	-0,5827 [14,2095]	-9,5690 [101.319,2852]	1,8198 [27,3484]	80,1723 [214.584,1825]
14	0,7130 [17,7641]	-76,5497 [51.326,6140]	-0,5475 [13,8942]	-18,4215 [82.383,3471]	1,5802 [22,9553]	52,5813 [136.686,6041]
15	0,9563 [17,9525]	-49,7095 [92.363,1434]	-0,3128 [12,3831]	0,0391 [99.559,6933]	1,7849 [22,5723]	73,1391 [171.418,8878]
16	0,5424 [16,5442]	-67,9992 [74.499,6674]	-0,6330 [12,1381]	-19,9459 [85.677,3767]	1,3118 [20,6618]	46,1553 [134.015,1515]
20	0,1761 [14,2007]	-75,4348 [58.512,8340]	-0,6205 [10,5784]	-25,1317 [71.645,9135]	0,8170 [16,4928]	26,4183 [128.436,4884]

\*nilai mean JALNK sebenarnya adalah 13,4451,  
nilai variansi JALNK sebenarnya adalah 281,7252.

Tabel L.3. Bias dan RKK dari penaksir mean dan variansi JALNK\* untuk  $N \sim DU(1,5)$  dan  $\theta = 5$

m	Metode penaksir					
	MM		MP1		MP2	
	Mean	Variansi	Mean	Variansi	Mean	Variansi
5	110,7627 [234.973,0805]	10.631,4 [4,49E+12]	-50,9296 [125.084,2361]	4.308.672 [4,10E+15]	4.306,5833 [86.815.676,0531]	9,21E+08 [6,84E+18]
9	34,3787 [44.681,8588]	-138.428 [8,98E+11]	-14,4643 [32.845,5778]	9.551,476 [8,36E+11]	331,0870 [814.958,2927]	11.352.885 [7,14E+15]
13	51,8819 [62.134,9793]	-205.334 [8,46E+11]	-31,8647 [40.062,7797]	34.662,13 [1,06E+13]	722,1400 [4.345.806,6977]	61.781.673 [1,96E+17]
14	44,9864 [58.932,9127]	-174.119 [1,45E+12]	-27,5924 [43.056,0173]	-31.006 [1,04E+12]	619,3506 [2.796.528,1353]	41.932.863 [9,47E+16]
15	42,1685 [53.735,9263]	-217.767 [3,92E+11]	-26,3183 [39.980,8003]	-43.126,4 [7,11E+11]	574,1392 [2.653.874,8292]	43.556.713 [9,87E+16]
16	26,6850 [49.644,8907]	-220.700 [6,93E+11]	-33,8955 [35.858,7344]	-74.171,8 [8,07E+11]	453,1403 [1.773.608,9016]	27.596.889 [4,20E+16]
20	11,3507 [39.112,5220]	-152.946 [1,7E+12]	-31,3893 [28.168,3141]	-68.577,6 [5,37E+11]	259,4417 [619.269,9934]	9.297.497 [5,94E+15]

\*nilai mean JALNK sebenarnya adalah 734,0758,  
nilai variansi JALNK sebenarnya adalah 839.810,8669.

Lampiran C Nilai aktual untuk rata-rata dan simpangan baku persentase penyimpangan hasil estimasi utang klaim dari metode MM, MP1, MP2, dan MCL.

Tabel L.4. Nilai aktual rata-rata dan simpangan baku (dalam kurung) persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran  $\sim DU(1,5)$

Jumlah klaim	MM		MP1		MP2		MCL
	Kovariat		Kovariat		Kovariat		
	Ya	Tidak	Ya	Tidak	Ya	Tidak	
100	0,7000	0,7258	0,6732	0,8296	0,4909	0,6603	1,7555
	[0,4128]	[0,4988]	[0,3457]	[0,7677]	[0,2599]	[0,3448]	[4,3650]
200	0,5113	0,5198	0,4303	0,6965	0,4687	0,5585	2,3210
	[0,2804]	[0,2719]	[0,2884]	[0,7047]	[0,1923]	[0,2955]	[6,4076]
300	0,4478	0,4504	0,3186	0,7140	0,4886	0,4823	1,4059
	[0,2624]	[0,2624]	[0,2101]	[0,7799]	[0,1542]	[0,3218]	[2,9480]
400	0,4209	0,4221	0,2792	0,6196	0,4923	0,4287	0,7940
	[0,2023]	[0,2168]	[0,1826]	[0,5368]	[0,1319]	[0,2474]	[1,2971]
500	0,4509	0,4540	0,2613	0,6080	0,5441	0,4514	0,7251
	[0,1864]	[0,1944]	[0,1635]	[0,6055]	[0,1187]	[0,2382]	[1,1633]
1.000	0,4565	0,4571	0,2178	0,6709	0,5807	0,4236	0,4555
	[0,1583]	[0,1628]	[0,1341]	[0,5936]	[0,0793]	[0,2065]	[0,6144]
3.000	0,4344	0,4353	0,1477	0,8973	0,5864	0,4200	0,2566
	[0,0963]	[0,1000]	[0,0912]	[0,4632]	[0,0477]	[0,1448]	[0,2662]
5.000	0,4356	0,4346	0,1342	0,9448	0,5867	0,4290	0,1919
	[0,0766]	[0,0800]	[0,0781]	[0,3923]	[0,0366]	[0,1175]	[0,1756]

Tabel L.5. Nilai aktual rata-rata dan simpangan baku (dalam kurung) persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran seperti Persamaan (IV.6)

Jumlah klaim	MM		MP1		MP2		MCL
	Kovariat		Kovariat		Kovariat		
	Ya	Tidak	Ya	Tidak	Ya	Tidak	
100	0,6165	0,6262	0,6168	0,6431	0,4966	0,6342	1,3820
	[0,3071]	[0,3433]	[0,2995]	[0,4058]	[0,4880]	[0,4026]	[3,0328]
200	0,5091	0,4926	0,5106	0,4288	0,3162	0,4758	0,6088
	[0,2270]	[0,2386]	[0,2229]	[0,2772]	[0,2746]	[0,2587]	[0,5574]
300	0,4667	0,4757	0,4645	0,3864	0,2621	0,4441	0,8842
	[0,2050]	[0,2008]	[0,2179]	[0,2636]	[0,1868]	[0,2117]	[1,9459]
400	0,4349	0,4335	0,4299	0,3979	0,2200	0,4278	0,6100
	[0,2132]	[0,2259]	[0,2143]	[0,2561]	[0,1692]	[0,2319]	[0,7509]
500	0,4108	0,4147	0,4104	0,4040	0,2120	0,4110	0,5547
	[0,2032]	[0,2117]	[0,2024]	[0,3278]	[0,1615]	[0,2398]	[0,7164]
1.000	0,3282	0,3320	0,3282	0,3252	0,1582	0,3076	0,4206
	[0,1608]	[0,1656]	[0,1605]	[0,3304]	[0,1190]	[0,2011]	[0,4527]
3.000	0,3117	0,3106	0,3118	0,3043	0,0950	0,2467	0,2359
	[0,1116]	[0,1173]	[0,1094]	[0,2661]	[0,0713]	[0,1313]	[0,2180]
5.000	0,3067	0,3066	0,3071	0,3239	0,0808	0,2302	0,1840
	[0,0899]	[0,0934]	[0,0881]	[0,2398]	[0,0615]	[0,1155]	[0,1656]

Tabel L.6. Nilai aktual rata-rata dan simpangan baku (dalam kurung) persentase penyimpangan estimasi utang klaim untuk frekuensi pembayaran seperti Persamaan (IV.7)

Jumlah klaim	MM		MP1		MP2		MCL
	Kovariat		Kovariat		Kovariat		
	Ya	Tidak	Ya	Tidak	Ya	Tidak	
100	0,5103	0,5280	0,4974	0,6263	0,4182	0,5795	1,7131
	[0,3474]	[0,3334]	[0,3217]	[0,6306]	[0,2116]	[0,4978]	[1,8818]
200	0,4174	0,4345	0,4067	0,5758	0,4841	0,5194	0,8265
	[0,2409]	[0,2252]	[0,2365]	[0,6013]	[0,1654]	[0,3860]	[1,0448]
300	0,3759	0,3722	0,3711	0,5302	0,5110	0,4445	0,6749
	[0,1814]	[0,1840]	[0,1820]	[0,5550]	[0,1125]	[0,3624]	[0,6938]
400	0,3115	0,3280	0,3102	0,6089	0,5022	0,4107	0,6384
	[0,1953]	[0,1996]	[0,1985]	[0,5436]	[0,1056]	[0,3117]	[0,8626]
500	0,3356	0,3400	0,3343	0,5566	0,5305	0,3886	0,5391
	[0,1806]	[0,1898]	[0,1774]	[0,5436]	[0,0938]	[0,2561]	[0,6752]
1.000	0,3079	0,3110	0,3047	0,5378	0,5470	0,3421	0,3745
	[0,1441]	[0,1522]	[0,1425]	[0,4840]	[0,0637]	[0,1912]	[0,4762]
3.000	0,2895	0,2901	0,2861	0,6212	0,5506	0,3002	0,2284
	[0,0836]	[0,0837]	[0,0852]	[0,3265]	[0,0342]	[0,1377]	[0,1781]
5.000	0,2779	0,2784	0,2779	0,6425	0,5505	0,2935	0,1677
	[0,0760]	[0,0797]	[0,0734]	[0,2696]	[0,0287]	[0,1142]	[0,1490]

## RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandung, Jawa Barat pada tanggal 28 November 1974, sebagai anak ketiga dari lima bersaudara dari pasangan Emben Amiruddin (alm) dan Enok Ikah. Pada usia sekitar 28 tahun - tepatnya tanggal 23 Mei 2002, penulis menikah dengan Lia Rahayu dan sampai saat ini telah dikaruniai dua orang anak laki-laki bernama Umar Ash Shiddiq Muttaqien dan Hamzah Amiruddin Muttaqien serta seorang anak perempuan bernama Alia Az Zahra Muttaqien.

Tahun 1993 penulis lulus dari SMA Negeri 6 Bandung, dan pada tahun yang sama penulis mulai menempuh program sarjana di Jurusan Statistika FMIPA Unisba. Pendidikan sarjana diselesaikan sampai tahun 1997. Tahun 1998 - 2000 penulis menimba ilmu di Program Magister Jurusan Teknik dan Manajemen Industri Bidang Kekhususan Teknik Industri ITB. Penulis diterima menjadi dosen di Program Studi Statistika FMIPA Unisba pada tahun 2001. Program Magister Statistika ditempuh oleh penulis pada tahun 2002 - 2005 di IPB. Pada tahun 2007 penulis mulai menempuh studi S3 di Program Studi Doktor Matematika ITB dan tergabung dalam Kelompok Keahlian Statistika.

Berikut ini adalah beberapa publikasi ilmiah yang telah dihasilkan dan kegiatan ilmiah yang telah diikuti selama menempuh pendidikan Program Doktor.

### Publikasi Ilmiah

1. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2008): Run-off Triangle Data dan Permasalahannya, *Jurnal Statistika: Forum Teori dan Aplikasi Statistika*, **8**, 55–59.
2. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2008): Chain Ladder Method as a Gold Standard to Estimate Loss Reserves, *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika Indonesia di Jurusan Matematika Fakultas MIPA UGM, Yogyakarta*, 356–364.

3. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2008): Generating Claim Data of General Insurance Based on Collective Risk Model and Claim Process, *Proceedings of the Third International Conference on Mathematics and Statistics (ICOMS-3), Institut Pertanian Bogor, Indonesia.*
4. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2008): Algoritma untuk Membangkitkan Data Klaim Asuransi Umum Kelas Bisnis Long-tail, *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNPAR, Bandung, 194–196.*
5. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2009): Distribusi Outstanding Claim Liability Berdasarkan Data Klaim Individu: Studi Kasus di Asuransi Mobil, *Prosiding Seminar Nasional Matematika di Jurusan Matematika, Universitas Jember, Jember, 474–486.*
6. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2009): Distribution-Free Test for Stability on Run-off Triangle, *Proceedings of the Fifth International Conference on Mathematics, Statistics, and Their Applications (ICMSA), Universitas Andalas, Bukittinggi, Indonesia, 802–808.*
7. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., Darwis, S., dan Djojogugito, R.A. (2010): The Moments of Sum of Correlated Random Variables, *Far East Journal of Theoretical Statistics, 31, 49–57.*
8. Mutaqin, A.K., Darwis, S., Tampubolon, D.R., dan Djojogugito, R.A. (2010): Estimating Mean and Variance of Sum of Correlated Random Variables using Empirical Moments, *Advances and Applications in Statistics, 16, 65–81.*
9. Mutaqin, A.K., Darwis, S., Tampubolon, D.R., dan Djojogugito, R.A. (2011): Estimation of Outstanding Claims Liability Using Empirical Moments of Correlated Random Sum, *International Journal of Applied Mathematics & Statistics, 23, 26–38.*

#### **Publikasi Ilmiah yang Tidak Terkait Langsung dengan Disertasi**

1. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2009): Konvolusi Dua Peubah Binomial Negatif Saling Bebas. *Prosiding Seminar Nasional Matematika Universitas Parahyangan, Bandung, ST 10–16.*

2. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2009): Pengujian Kesamaan Beberapa Populasi Distribusi Binomial Negatif Saling Bebas. *Prosiding Seminar Nasional Matematika, Universitas Parahyangan, Bandung*, ST 17-21.

#### **Pemakalah dalam Seminar/Konferensi**

1. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2008): Chain Ladder Method as a Gold Standard to Estimate Loss Reserves, *Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika Indonesia di Jurusan Matematika Fakultas MIPA UGM, Yogyakarta*, pada tanggal 31 Mei 2008.
2. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2008): Generating Claim Data of General Insurance Based on Collective Risk Model and Claim Process, *The Third International Conference on Mathematics and Statistics (ICOMS-3), Institut Pertanian Bogor, Indonesia*, pada tanggal 5-6 Agustus 2008.
3. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2008): Algoritma untuk Membangkitkan Data Klaim Asuransi Umum Kelas Bisnis Long-tail, *Seminar Nasional Mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNPAR, Bandung*, pada tanggal 6 September 2008.
4. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2009): Distribusi Outstanding Claim Liability Berdasarkan Data Klaim Individu: Studi Kasus di Asuransi Mobil, *Seminar Nasional Matematika di Jurusan Matematika, Universitas Jember, Jember*, pada tanggal 28 Februari 2009.
5. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2009): Distribution-Free Test for Stability on Run-off Triangle, *The Fifth International Conference on Mathematics, Statistics, and Their Applications (ICMSA), Universitas Andalas, Bukittinggi, Indonesia*, pada tanggal 9-11 Juni 2009.
6. Mutaqin, A.K., Tampubolon, D.R., dan Darwis, S. (2009): Konvolusi Dua Peubah Binomial Negatif Saling Bebas. *Prosiding Seminar Nasional Matematika Universitas Parahyangan, Bandung*, pada tanggal 5 September 2009.

7. Mutaqin, A.K., Darwis, S., Tampubolon, D.R., dan Djojosugito, R.A. (2010): Estimation of Outstanding Claims Liability Using Empirical Moments of Correlated Random Sum, *The Sixth International Conference on Mathematics, Statistics, and Their Applications (ICMSA)*, Kuala Lumpur, Malaysia, pada tanggal 3–4 November 2010.

### **Proyek Penelitian**

1. Program Riset KK ITB 2009, Pengembangan Metode Updating Model Reservoir.
2. Penelitian Profil Risiko Asuransi Kendaraan Bermotor Tahun 2009.
3. Program Riset KK ITB 2010, Estimasi Sekuensial Menggunakan EnKF untuk Pemetaan Reservoir.
4. Penelitian Profil Risiko Asuransi Kendaraan Bermotor Tahun 2010.
5. Program Riset KK ITB 2011, Identifikasi Reservoir Komposit Menggunakan Ensemble Kalman Filter.
6. Penelitian Profil Risiko Asuransi Kendaraan Bermotor Tahun 2011.