FORMULA MENCARI JARI-JARI LINGKARAN DALAM PADA SEBUAH SEGITIGA

Oleh :

Farid H Badruzzaman, Drs

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Islam Bandung
2007

Lembar Pengesahan

FORMULA MENCARI JARI-JARI LINGKARAN DALAM PADA SEBUAH SEGITIGA

Telah didokumentasikan
Di Perpustakaan UNISBA,

Arief Dj. Tresnawan, Drs.

Kata Pengantar

Bismillahirrahmaanirrahiem

Puji dan syukur kita panjatkan ke hadirat Allah SWT, yang telah menganugerahkan akal dan hati kepada manusia sehingga dapat menjalankan tugas kekhalipahan di muka Bumi ini.

Sebagai seorang pengajar di Perguruan Tinggi, dan dalam rangka meningkatkan kualitas dengan mengikuti aturan dan ketentuan yang berlaku dalam sistem pendidikan tinggi di Indonesia, salah satunya adalah kenaikan fungsional dosen yang dipenuhi dalam unsur Tri Dharma Perguruan Tinggi.

Makalah ini dibuat dalam rangka memenuhi persyaratan aspek pelaksanaan penelitian ilmiah. Adapun bahasan dalam makalah ini disusun berdasarkan dan disesuaikan dengan latar belakang penulis miliki, yaitu matematika..

Tentu saja apa yang penulis sampaikan melalui makalah ini belum merasa puas. Saran keritik dari siapapun akan menjadi bekal penulis pada makalah-makalah selanjutnya.

Ucapan terimakasih, penulis sampaikan kepada Pimpinan Universitas Islam Bandung yang telah memberikan kesempatan ini kepada penulis.

Bandung, 2007

FORMULA MENCARI JARI-JARI LINGKARAN DALAM PADA SEBUAH SEGITIGA

Farid H Badruzzaman

Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNISBA
Jalan Tamansari 1 Bandung 40116
Tlp. (022)4203368 E-mail faridhbadruzzaman@yahoo.com

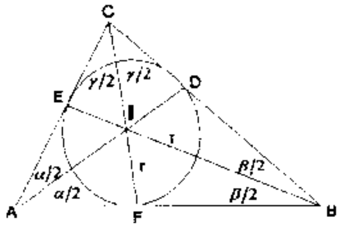
Abstrak

Pada sebuah segitiga jika di tarik garis dari semua titik sudut ke sebuah titik yang membagi sudut nya menjadi dua bagian yang sama besar pada garis yang ada di hadapannya, maka ketiga garis tersebut berpotongan pada sebuah titik I. Melalui I sebagai pusat dapat dibuat sebuah lingkaran yang menyinggung setiap sisi dari segitiga tersebut. Pada makalah ini akan dibahas beberapa formula untuk mencari jari-jari lingkaran dalam pada sebuah segitiga

Kata-kata kunci : segitiga, lingkaran, Incenter

Pendahuluan

Incenter I dari sebuah segitiga adalah titik potong dari tiga buah garis yang ditarik dari titik-titik sudut ke suatu titik yang membagi sudut menjadi dua bagian dari tiap titik sudut (dari titik A ditarik garis ke sisi BC yang melalui titik yang membagi sudut A dua bagian. Dengan cara yang sama untuk titik sudut B dan C. Lingkaran dalam segitiga adalah sebuah lingkaran yang dibuat dalam segitiga dengan pusatnya I dan menyinggung ketiga sisi segitiga.



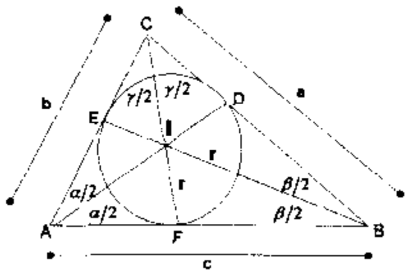
Gambar 1

Teorema 1

Misal sisi AB = c, sisi BC = a dan sisi AC = b. Jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah r dapat dinyatakan sebagai $r = \dfrac{2K}{a+b+c}$; dimana K : luas segitiga

Bukti

Perhatikan gambar 2 berikut ini



Gambar 2

$\Delta AFI = \Delta AEI$, maka $AF = AE$
$\Delta BFI = \Delta BDI$, maka $BF = BD$
$\Delta CDI = \Delta CEI$, maka $CD = CE$

ΔAFI siku-siku di F

Misal $AF = x$, maka luas $\Delta AFI = \dfrac{xr}{2}$

Luas $\Delta BFI = \dfrac{(c-x)r}{2}$

Panjang FB = BD = c – x, maka panjang CD = a – (c – x) = a – c + x

AF = AE = x, maka CE = b – x

CE = CD, maka b – x = a – c + x

2x = b – a + c

$$x = \frac{b-a+c}{2}$$

Luas $\Delta CDI = \dfrac{r(a-c+x)}{2}$

Luas ΔABC = L ΔAFI + L ΔAEI + L ΔBFI + L ΔBDI + L ΔCDI + L ΔCEI

$$= \frac{xr}{2} + \frac{xr}{2} + \frac{(c-x)r}{2} + \frac{(c-x)r}{2} + \frac{r(a-c+x)}{2} + \frac{r(a-c+x)}{2}$$

$$= \frac{ar}{2} + \frac{xr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{xr}{2}$$

$$= \frac{ar}{2} + \frac{(b-a+c)r}{4} + \frac{ar}{2} + \frac{(b-a+c)r}{4}$$

$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{4} - \frac{ar}{4} + \frac{cr}{4} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{4} - \frac{ar}{4} + \frac{cr}{4}$$

$$= \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2}$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)r$$

Jadi, $K = \left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)r$ atau $r = \dfrac{K}{s}$; $\qquad s = \left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

$r = \dfrac{K}{s} = \dfrac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \dfrac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s^2}}$; K : luas segitiga

$$r = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \qquad (1.1)$$

Teorema 2

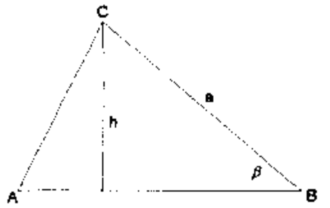
Jika a, b dan c adalah sisi sebuah segitiga dan α , β , dan γ adalah masing-masing sudut di hadapan sisi a, b dan c, maka jari-jari lingkaran dalam dapat dinyatakan sebagai

$$r = \frac{b+c-a}{2} tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (2.1)$$

$$r = \frac{a+c-b}{2} tg\left(\frac{\beta}{2}\right) \qquad (2.2)$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) \qquad (2.3)$$

Bukti



Gambar 3

$$\sin\beta = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\sin\beta$$

$$K = \frac{1}{2}ac\sin\beta \rightarrow 2K = ac\sin\beta$$

$$K = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)r \rightarrow r = \frac{2K}{a+b+c}$$

$$r = \frac{ac\sin\beta}{a+b+c}$$

$$r = \frac{ac\sin\beta}{a+b+c}\cdot\frac{a+c-b}{a+c-b}$$

$$r = \frac{ac(a+c-b)\sin\beta}{(a+c)^2-b^2}$$

$$r = \frac{ac(a+c-b)\sin\beta}{a^2+c^2+2ac-b^2}$$

Dari dalil cosinus dapat ditentukan bahwa $b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\beta$ atau $a^2+c^2-b^2 = 2ac\cos\beta$

$$r = \frac{ac(a+c-b)\sin\beta}{2ac\cos\beta+2ac}$$

$$r = \frac{ac(a+c-b)\sin\beta}{2ac(\cos\beta+1)}$$

$$r = \frac{(a+c-b)\sin\beta}{2(\cos\beta+1)}$$

Karena $\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} = tg\left(\frac{\beta}{2}\right)$

Maka

$$r = \frac{(a+c-b)}{2}tg\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Bukti identitas $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Bentuk sederhana dinyatakan sebagai berikut

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\bullet\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha}}{\sqrt{(1+\cos\alpha)^2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Teorema 3

Jari-jari lingkaran dalam sebuah segitiga siku-siku dengan kaki-kaki a dan b dan hipotenusa c, adalah

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Bukti :

Dengan memperhatikan teorema 2 di atas $r = \frac{a+b-c}{2}tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)$. Karena $\gamma = \frac{\pi}{2}$, sehingga

$$r = \frac{a+b-c}{2}tg\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \qquad (3.1)$$

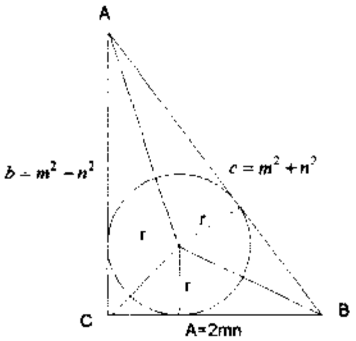
Teorema 4

Misal m dan n adalah bilangan bulat, dimana m>n. Misal $a = 2m$, $b = m^2 - n^2$ dan $c = m^2 + n^2$ adalah sisi-sisi segitiga siku-siku. Maka jari-jari lingkaran dalam dari segitiga Pythagoras adalah bilangan bulat $r = m(m - n)$

Bukti

Pada sebuah segitiga dengan sisi-sisinya (a, b, c) yang siku-sikunya di C, berlaku

$(a,b,c) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$



Gambar 4

Perhatikan gambar 4 di atas

Luas segitiga $A = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{(2mn)(m^2 - n^2)}{2} = mn(m^2 - n^2)$ (4.1)

Luas segitiga tersebut, dapat juga dicari melalui menjumlahkan segitiga-segitiga kecil yang terdapat di dalamnya, yaitu

$$A = \frac{(2mn)r}{2} + \frac{(m^2 - n^2)r}{2} + \frac{(m^2 + n^2)r}{2}$$

$A = m(m + n)r$ (4.2)

Dari persamaan (4.1) dan (4.2) kita dapatkan

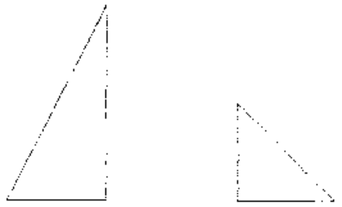
$m(m + n)r = mn(m^2 - n^2)$

$r = n(m - n)$ (4.3)

Mengkonstruksi Segitiga Heron

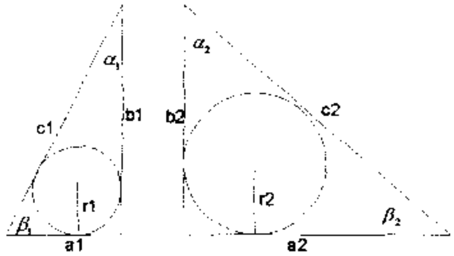
Untuk mengkonstruksi segitiga Heron dapat juga dikonstruksi dari dua segitiga Pythagoras. Langkah-langkahnya adalah

1. Pilih dua segitiga Pythagoras, dan tempatkan berdampingan (lihat gambar 5 di bawah ini)



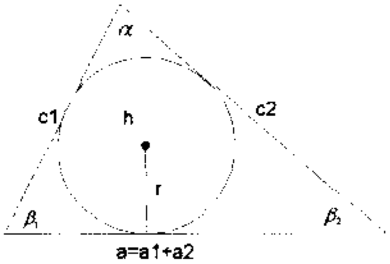
Gambar 5

2. Kalikan setiap segitiga dengan bilangan bulat sehingga kita peroleh dua segitiga Pythagoras (lihat gambar 6 di bawah ini)



Gambar 6

3. Selanjutnya dempetkan salah satu sisi yang mempunyai panjang yang sama (lihat gambar 7 di bawah ini)



Gambar 7

Dari segitiga sebelah kiri dari gambar 7 di atas dapat ditentukan bahwa $h = c_1 \sin\beta_1$ dan alasnya adalah $a_1 = c_1 \cos\beta_1$. Selanjutnya karena c_1 adalah bilangan bulat dan dengan menggunakan teorema di atas bahwa $\sin\beta_1$ dan $\cos\beta_1$ adalah bilangan rasional. Jadi segitiga siku-siku pada sebelah kiri mempunyai sisi bilangan rasional dan mempunyai panjang sisi yang sama dengan sisi yang ada di sebelah kanannya.

Teorema 5

Dengan notasi yang ada pada gambar 6 dan 7 kita mempunyai $r = (h - r_1 - r_2)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ dimana $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

Bukti

Dengan menggunakan teorema 2, untuk gambar 7

$$r = \frac{c_1 + c_2 - (a_1 + a_2)}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{c_1 - a_1 + c_2 - a_2}{2}\tan\frac{\alpha}{2} \qquad (5.1)$$

Tambahkan dengan b_1 dan b_2 dan kurangi juga dengan b_1 dan b_2 pada persamaan (5.1), sehingga diperoleh $\frac{b_1 + b_2 + (c_1 - a_1 - b_1) + (c_2 - a_2 - b_2)}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$

Dengan menggunakan teorema 3, jari-jari dari segitiga sebelah kiri kita memperoleh $r_1 = \frac{a_1 + b_1 - c_1}{2}$ dan segitiga sebelah kanan kita peroleh $r_2 = \frac{a_2 + b_2 - c_2}{2}$. Karena $h = b_1 = b_2$

Contoh 1

Misal pasangan triple Pythagoras (3, 4, 5), kita cari jari-jari lingkaran dalam segitiga yang dibentuknya

$$r = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$r=\sqrt{\frac{(6-3)(6-4)(6-5)}{6}}=\sqrt{\frac{(3)(2)(1)}{6}}=\sqrt{1}=1$$

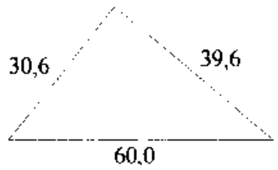
atau

$$r=\frac{a+b-c}{2}$$

$$r=\frac{3+4-5}{2}=1$$

Contoh 2

Tentukan jari lingkaran dalam dari segitiga dengan panjang sisi-sisinya seperti pada gambar di bawah ini



Gambar 8

Jawab :

Misal a = 30,6 cm; b = 60,0cm ; c = 39,6 cm

$$r=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$r=\sqrt{\frac{(65,1-30,6)(65,1-60)(65,1-39,6)}{65,1}}=\sqrt{\frac{(34,5)(5,1)(25,5)}{65,1}}=\sqrt{\frac{4486,725}{65,1}}=\sqrt{68,92}=8,30\,\text{cm}$$

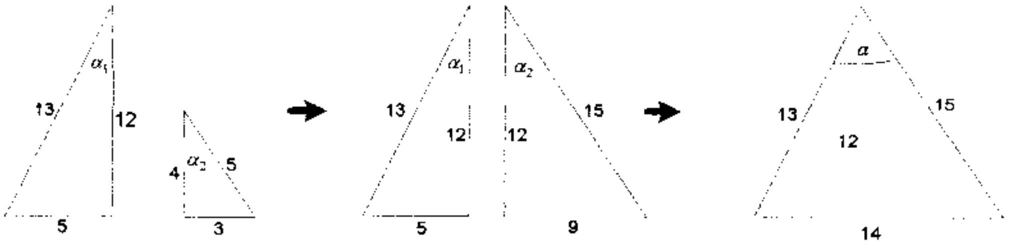
Contoh 3

Carilah jari-jari lingkaran dalam segitiga dimana sisi-sisinya 10 cm, 17 cm dan 21 cm

$$r=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$r=\sqrt{\frac{(24-10)(24-17)(24-21)}{24}}=\sqrt{\frac{(14)(7)(3)}{24}}=\sqrt{\frac{294}{24}}=\sqrt{12,25}=3,5\,\text{cm}$$

Contoh 4



Gambar 9

$$r=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$r_1=\sqrt{\frac{(15-5)(15-12)(15-13)}{15}}=\sqrt{\frac{(10)(3)(2)}{15}}=\sqrt{4}=2$$

$$r_2=\sqrt{\frac{(6-3)(6-4)(6-5)}{6}}=\sqrt{\frac{(3)(2)(1)}{6}}=\sqrt{1}=1$$

$$r = (h - r_1 - r_2)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\text{ ; dimana } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$s = \frac{1}{2}(14+15+13) = 21$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(21-15)(21-13)}{21(21-14)}} = \sqrt{\frac{(6)(8)}{(21)(7)}} = \sqrt{0,327} = 0,572$$

$$r = (h - r_1 - r_2)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = (12-2-1)(0,572) = 5,148$$

Teorema 6

Diberikan sebuah segitiga sama kaki dengan panjang alas $2a_1$, garis tinggi h dan panjang dua sisinya c, maka jari-jari lingkaran dalamnya adalah $r = \frac{(c-a_1)a_1}{h}$

Kesimpulan

Untuk mencari jari-jari lingkaran dalam pada sebuah segitiga dapat digunakan teorema-teorema di atas

Daftar Pustaka

1. Osler, Thomas and Chandrupatia, Tirupathi, R, "*Some Unusual Expressions for the Inradius of a triangle*", Rowan University, Glassboro, NJ 08028
2. Fine, Ira and Osler, Thomas, "*The Remarkable Incircle of a Triangle*", Mathematics and Computer Education, 35 (2001), pp. 44-50
3. Sastry, K.R.S., Heron Triangle : "*An Incenter Perspective, Mathematics Magazine*", 73(2000), pp. 388-392