SEGIEMPAT BRAHMAGUPTA

Oleh :

Farid H Badruzzaman, Drs

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Islam Bandung
2005

Lembar Pengesahan

SEGIEMPAT BRAHMAGUPTA

Telah didokumentasikan
Di Perpustakaan UNISBA,

Arief Dj. Tresnawan, Drs.

Kata Pengantar

Bismillahirrahmaanirrahiem

Puji dan syukur kita panjatkan ke hadirat Allah SWT, yang telah menganugerahkan akal dan hati kepada manusia sehingga dapat menjalankan tugas kekhalipahan di muka Bumi ini.

Sebagai seorang pengajar di Perguruan Tinggi, dan dalam rangka meningkatkan kualitas dengan mengikuti aturan dan ketentuan yang berlaku dalam sistem pendidikan tinggi di Indonesia, salah satunya adalah kenaikan fungsional dosen yang dipenuhi dalam unsur Tri Dharma Perguruan Tinggi.

Makalah ini dibuat dalam rangka memenuhi persyaratan aspek pelaksanaan penelitian ilmiah. Adapun bahasan dalam makalah ini disusun berdasarkan dan disesuaikan dengan latar belakang penulis miliki, yaitu matematika..

Tentu saja apa yang penulis sampaikan melalui makalah ini belum merasa puas. Saran keritik dari siapapun akan menjadi bekal penulis pada makalah-makalah selanjutnya.

Ucapan terimakasih, penulis sampaikan kepada Pimpinan Universitas Islam Bandung yang telah memberikan kesempatan ini kepada penulis.

Bandung, 2005

SEGI EMPAT BRAHMAGUPTA

Farid H Badruzzaman

Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNISBA
Jalan Tamansari 1 Bandung 40116
Tlp. (022)4203368 E-mail faridhbadruzzaman@yahoo.com

Abstrak
Pada makalah ini akan dibahas formula Brahmagupa, yaitu formula untuk menghitung luas sebuah segempat beraturan atau tidak beraturan yang dikonstruksi pada sebuah lingkaran.

Kata-kata kunci : Brahmagupta, Segiempat, Lingkaran

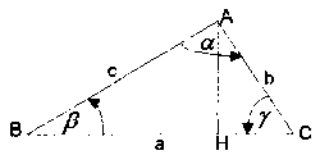
Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai bentuk-bentuk bidang yang berbentuk segempat. Menghitung luas segiempat beraturan, dapat dihitung dengan formula luas = panjang × lebar. Tetapi untuk segiempat yang tidak beraturan tidaklah demikian. Pada makalah ini akan dibahas bagaimana menghitung luas segi empat yang tidak beraturan yang dikonstruksi pada sebuah lingkaran. Formula yang digunakan adalah formula Brahmagupta

Dalil cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos\gamma$$

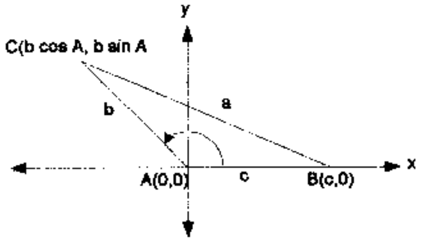
Bukti :



Gambar I

a = BH + HC = BC
HC = b cos γ
BH – HC = (BH + HC) – 2HC = a -2b cos γ
Perhatikan Δ ABH dan Δ AHC, maka
$$c^2 = (BH)^2 + (AH)^2$$
$$b^2 = (HC)^2 + (AH)^2$$
$$c^2 - b^2 = (BH)^2 + (AH)^2 - (HC)^2 - (AH)^2$$
$$c^2 - b^2 = (BH)^2 - (HC)^2 = (BH - HC)(BH + HC) = (a - 2b \cos\gamma)(a)$$
$$c^2 - b^2 = (a - 2b \cos\gamma)(a) = a^2 - 2ab \cos\gamma$$
$c^2 - b^2 = a^2 - 2ab\cos\gamma$ sehingga diperoleh
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Cara lain



Gambar 2

Gunakan formula jarak dua titik. Jarak antara titik B dan C adalah

$a^2 = (b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2$

$a^2 = b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A$

$a^2 = b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A - 2bc\cos A + c^2$

$a^2 = b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc\cos A + c^2$

$a^2 = b^2 - 2bc\cos A + c^2$

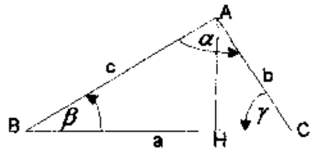
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Jika $\angle C = 0°$, maka dalil cosinus menjadi dalil Pythagoras. Jadi dalil Pythagoras merupakan hal khusus dari dalil cosinus

Luas Segitiga ABC



Gambar 3

Luas segitiga ABC adalah $L = \frac{1}{2}(alas \times tinggi) = \frac{1}{2}(a \times AH)$

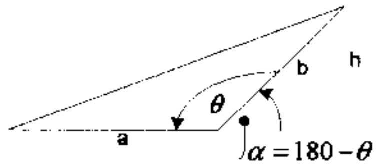
Tetapi $\sin\beta = \frac{AH}{c}$, maka $AH = c\sin\beta$

$L = \frac{1}{2}(a \times c\sin\beta) = \frac{1}{2}ac\sin\beta$

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa

$L = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$

Cara lain



Gambar 4

$\sin\alpha = \frac{h}{b} \to h = b\sin\alpha$

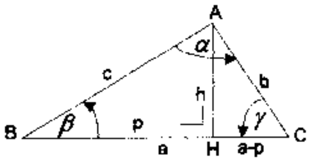
Tetapi $\sin\alpha = \sin(180 - \theta) = \sin\theta$, maka $h = b\sin\theta$

Luas segitiga $L = \frac{1}{2}(alas)(tinggi)$

$$L = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

Formula Heron

Perhatikan segitiga berikut



Gambar 5

Dengan menggunakan dalil Pythagoras dapat dinyatakan bahwa

$$h^2 = c^2 - p^2$$
$$h^2 = b^2 - (a-p)^2$$

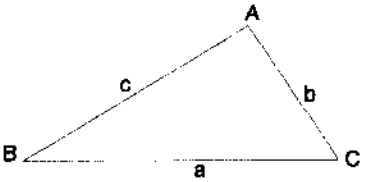
sehingga :

$$c^2 - p^2 = b^2 - (a-p)^2$$
$$c^2 - p^2 = b^2 - a^2 + 2ap - p^2$$
$$c^2 = b^2 - a^2 + 2ap$$
$$p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$
$$h^2 = c^2 - p^2 = (c-p)(c+p)$$
$$h^2 = (c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a})(c + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a})$$
$$h^2 = \left(\frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)$$
$$h^2 = \left(\frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}\right)\left(\frac{(a+c)^2 - b^2}{2a}\right)$$
$$h^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)}{4a^2}$$
$$h^2 = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}{4a^2}$$
$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{4a^2}$$
$$h^2 = \frac{2s(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)}{4a^2} \qquad \text{dimana } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$
$$h^2 = \frac{16s(s-a)(s-c)(s-b)}{4a^2}$$
$$h^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$
$$h = \sqrt{\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}}$$
$$h = 2\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

Maka luas segitiga dapat dinyatakan dalam bentuk

$$L = \frac{1}{2}ah = a\frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{a} = \sqrt{s(s-a)(s-b)s-c)}$$

Cara lain



Gambar 6

Kita mulai dengan formula bahwa luas segitiga di atas adalah $L = \frac{1}{2}ab\sin C$

$$L = \frac{1}{2}ab\sin C$$

$$(L)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2 C$$

$$(L)^2 = \frac{1}{2}a^2b^2(1-\cos^2 C)$$

$$(L)^2 = \frac{1}{2}a^2b^2(1-\cos C)(1+\cos C)$$

Dari dalil cosinus kita mempunyai bahwa

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$1+\cos C = 1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad \textit{(kedua ruas ditambah 1)}$$

$$1+\cos C = \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$1+\cos C = \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}$$

$$1+\cos C = \frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$1-\cos C = 1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$1-\cos C = \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}$$

$$1-\cos C = \frac{c^2+2ab-a^2-b^2}{2ab}$$

$$1-\cos C = \frac{c^2-(a^2+b^2-2ab)}{2ab}$$

$$1-\cos C = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}$$

$$1-\cos C = \frac{[c-(a-b)][c+(a-b)]}{2ab}$$

$$1-\cos C = \frac{[c-a+b][c+a-b]}{2ab} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Substitusikan (1) dan (2) terhadap $(L)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos C)(1+\cos C)$, maka

$$(L)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\,\frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab}\,\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab}$$

$$(L)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\,\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}\,\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab}$$

$$(L)^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(2)(2)}\,\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(2)(2)}$$

$$(L)^2 = \frac{(a+b+c)}{2}\,\frac{(a+b-c)}{2}\,\frac{(c+a-b)}{2}\,\frac{(c-a+b)}{2}$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$(s-c) = \frac{1}{2}(a+b-c)$$

$$(s-b) = \frac{1}{2}(c+a-b)$$

$$(s-a) = \frac{1}{2}(c-a+b)$$

Maka

$$(L)^2 = s(s-c)(s-b)(s-a)$$

$L = \sqrt{s(s-c)(s-b)(s-a)}$ *terbukti*

Contoh

Tentukan luas segitiga yang sisi-sisinya a=20; b=15 dan c=17

Jawab :

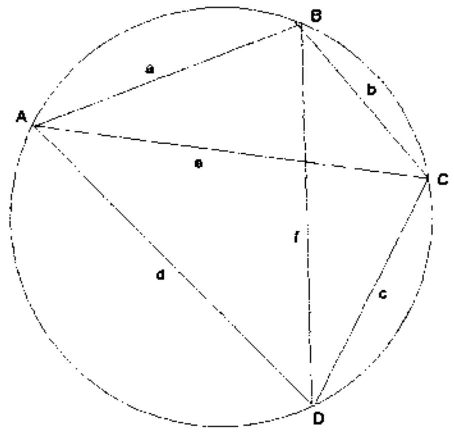
$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+15+17}{2} = 26$$

$L = \sqrt{26(26-20)(20-15)(20-17)} \approx 124,2739$ satuan luas

Formula Brahmagupta

Formula Brahmagupta dapat digunakan untuk menghitung luas dari sebuah segi empat yang dibentuk dalam sebuah lingkaran

Perhatikan gambar berikut



Gambar 7

Misal $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$

Misal AC = e, perhatikan segitiga ABC. Dengan menggunakan dalil cosinus dapat ditentukan bahwa $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B$. Selanjutnya kita perhatikan segitiga ACD. Dengan dalil cosinus dapat ditentukan bahwa $e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos D$. Menurut sebuah dalil bahwa $\angle ABC(\angle B)$ dan $\angle ADC(\angle D)$ saling suplemen. Sehingga $\cos D = -\cos B$ dan $\sin D = \sin B$. Luas daerah dari segitiga ABC adalah $L_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin B$ dan $L_{ACD} = \frac{1}{2}cd\sin D$

Misal K adalah jumlah luas daerah segitiga ABC dan segitiga ACD

$K = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D$ kalikan kedua ruasnya dengan 4

$4K = 2ab\sin B + 2cd\sin D$

$4K = 2(ab+cd)\sin D$

Dari dalil cosinus diperoleh $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D$

$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab+cd)\cos B$

$4K = 2(ab+cd)\sin D$ kuadratkan kedua ruasnya

$16K^2 = \left(2(ab+cd)\sin B\right)^2$ (1)

$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab+cd)\cos B$ kuadratkan kedua ruasnya

$\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 = \left(2(ab+cd)\cos B\right)^2$ (2)

Jumlah persamaan (1) dan (2), diperoleh

$$16K^2 + \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 = \left(2(ab+cd)\sin B\right)^2 + \left(2(ab+cd)\cos B\right)^2$$

$$16K^2 + \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 = 4\left(ab+cd\right)^2\sin^2 B + 4\left(ab+cd\right)^2\cos^2 B$$

$$16K^2 + \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 = 4\left(ab+cd\right)^2\left[\sin^2 B + \cos^2 B\right]$$

$$16K^2 + \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 = 4\left(ab+cd\right)^2$$

$$16K^2 = 4\left(ab+cd\right)^2 - \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2$$

$$16K^2 = \left(2\left(ab+cd\right) - \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)\right)\left(2\left(ab+cd\right) + \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)\right)$$

$$16K^2 = \left(\left(c^2+2cd+d^2\right) - \left(a^2-2ab+b^2\right)\right)\left(\left(a^2+2ab+b^2\right) - \left(c^2-2cd+d^2\right)\right)$$

$$16K^2 = \left(\left(c+d\right)^2 - \left(a-b\right)^2\right)\left(\left(a+b\right)^2 - \left(c-d\right)^2\right)$$

$$16K^2 = \left(\left(c+d-a+b\right)\left(c+d+a-b\right)\right)\left(\left(a+b-c+d\right)\left(a+b+c-d\right)\right)$$

$$K^2 = \frac{c+d-a+b}{2}\cdot\frac{c+d+a-b}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c-d}{2}$$

$$K^2 = \left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)$$

$$K = \sqrt{\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)}$$

Contoh 1

Gunakan formula Brahmagupta untuk menghitung segiempat dimana sisi-sisinya 6 em

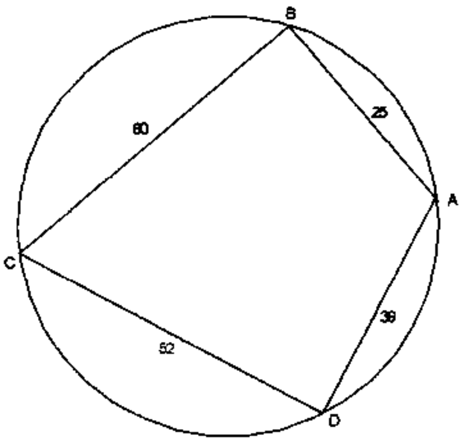
Jawab :

$s = \frac{1}{2}\left(6+6+6+6\right) = 12$

$L = \sqrt{(12-6)(12-6)(12-6)(12-6)} = \sqrt{6\cdot 6\cdot 6\cdot 6} = 36$ satuan luas

Contoh 2

Hitunglah daerah dari segi empat, dimana panjang sisinya adalah AB=5; BC=7; BC=5 dan CA=5



Gambar 8

Jawab :

$$s = \frac{1}{2}(25 + 60 + 52 + 39) = \frac{176}{2} = 88$$

$$L_{ABCD} = \sqrt{(88-25)(88-60)(88-52)(88-39)} = \sqrt{63 \cdot 28 \cdot 36 \cdot 49} = \sqrt{3111696} = 1764 \text{ satuan luas}$$

Kesimpulan

Formula untuk menghitung luas sebuah segiempat yang dikonstruksi pada sebuah lingkaran baik beraturan ataupun tidak dimana panjang sisi-sisinya diketahui dapat digunakan formula Brahmagupta, yaitu $K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Daftar Pustaka

[1] Raymond A. Barnett; Michael R. Ziegier; Karl E. Byleen, " *Colege Algebra With Trigonometry*" 7th ed, McGraw-Hill Higher Education Companies, Inc, 1221, Avenue of the Americas New York, 2001

[2] Todd Swanson; Janet Anderson; Robert Keeley, *Precalculus*, Harcourt Brace & Company, 1999

[3] K.R.S. Sastry, "*Brahmagupta Quadrilateral*", Forum Geometricorum Volume 2 (2002) 167