BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang mengandung paling sedikit satu turunan variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Berdasarkan banyak variabel bebasnya, persamaan diferensial dapat diklasifikasikan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP).

Persamaan diferensial biasa yaitu persamaan yang mengandung turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Contoh :

1. $\frac{dy}{dx} = x + 5$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = e^x + \sin x$

Persamaan diferensial parsial yaitu persamaan yang mengandung turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Contoh :

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$
2. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$

Orde dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi yang muncul di dalam persamaan, sedangkan derajat adalah pangkat tertinggi yang muncul di dalam persamaan. Berdasarkan banyak derajatnya persamaan diferensial biasa dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial linear dan non linear.

Persamaan yang memiliki pangkat satu disebut persamaan diferensial linear sedangkan yang memiliki pangkat lebih dari satu disebut persamaan diferensial non linear. Persamaan diferensial linear memiliki bentuk umum sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.1}$$

dengan *P(x)* dan *Q(x)* adalah fungsi kontinu dari *x* pada daerah definisi *P* dan *Q*.

Persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial linear homogen apabila nilai $Q(x) = 0$ dan merupakan persamaan diferensial non homogen apabila nilai $Q(x) \neq 0$.

Solusi umum dari persamaan (2.1) dapat ditentukan dengan menggunakan faktor integrasi. Faktor integrasi dari persamaan (2.1) adalah :

$$e^{\int P(x)dx}$$

Untuk memperoleh solusi umum dari persamaan (2.1), kedua ruas pada persamaan (2.1) dikalikan dengan faktor integrasinya sehingga :

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.2}$$

Ruas kiri merupakan turunan dari fungsi $ye^{\int P(x)dx}$ yaitu :

$$\frac{d}{dx} ye^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx} P(x)y$$

Sehingga persamaan (2.2) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.3}$$

Kemudian kedua ruas diintegralkan sehingga diperoleh :

$$\int \frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.4}$$

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C$$

Jadi bentuk solusi umum dari persamaan (2.1) adalah :

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right] \tag{2.5}$$

dengan *C* merupakan konstanta sembarang.

Persamaan diferensial orde satu memiliki bentuk lain yaitu Persamaan Bernoulli yang merupakan salah satu tipe khusus dari persamaan diferensial orde satu yang dikemukakan oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama lengkap James Bernoulli (1654-1705). Bentuk umum persamaan differensial Bernoulli adalah :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{2.6}$$

dengan *n* adalah bilangan asli.

Model pertumbuhan populasi logistik dengan faktor pemanenan memiliki bentuk persamaan diferensial Bernoulli dengan nilai *n* yang merupakan bilangan asli.

Jika $n > 1$, maka persamaan (2.6) dapat direduksi ke persamaan diferensial linear dengan cara sebagai berikut :

Misalkan $z = y^{(1-n)}$

$$\frac{dz}{dy} = (1-n)y^{-n}$$

Dengan aturan rantai diperoleh :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dy}$$

$$(1-n)y^{-n} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dy}{dx}(1-n)y^{-n} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{(1-n)}\frac{dz}{dx} \tag{2.7}$$

Substitusi persamaan (2.7) ke persamaan (2.6) sebagai berikut :

$$\frac{y^n}{(1-n)}\frac{dz}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{2.8}$$

Kemudian kedua ruas dikali dengan $\frac{(1-n)}{y^n}$ sehingga :

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)y^{(1-n)} = (1-n)Q(x) \tag{2.9}$$

Substitusikan nilai $z = y^{(1-n)}$ sehingga diperoleh :

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) merupakan persamaan diferensial linear sehingga dapat ditentukan bentuk solusi umumnya, yaitu :

$$z = e^{-\int (1-n)\, P(x)dx}\left[\int (1-n)\, Q(x) e^{\int (1-n)\, P(x)dx}\, dx + C\right]$$

$$y^{(1-n)} = e^{-\int (1-n)\, P(x)dx}\left[\int (1-n)\, Q(x) e^{\int (1-n)\, P(x)dx}\, dx + C\right]$$

$$y = \left[e^{-\int (1-n)\, P(x)dx}\left[\int (1-n)\, Q(x) e^{\int (1-n)\, P(x)dx}\, dx + C\right]\right]^{\frac{1}{(1-n)}} \qquad (2.11)$$

dengan C merupakan konstanta sembarang.

2.2 Model Pertumbuhan Populasi Logistik

Model pertumbuhan populasi logistik merupakan penyempurnaan dari model eksponensial yang dikemukaan oleh seorang ilmuwan bernama Robert Malthus pada akhir abad ke 19 sekitar tahun 1798. Model pertumbuhan secara eksponensial mengasumsikan bahwa laju pertumbuhan populasi terhadap waktu berbanding lurus dengan jumlah populasi yang ada, model tersebut memiliki bentuk $\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$ dengan t merupakan waktu, $N(t)$ merupakan jumlah populasi pada waktu t, dan r merupakan konstanta laju pertumbuhan populasi.

Pada kenyataannya populasi tidak tumbuh secara eksponensial karena ada faktor yang mempengaruhi pertumbuhan populasi seperti daya dukung lingkungan sehingga pada tahun 1838 model pertumbuhan populasi secara eksponensial disempurnakan oleh Verhults dan dikenal dengan model pertumbuhan populasi logistik. Pada model ini daya dukung lingkungan *carrying capacity* yang dilambangkan dengan K ikut diperhitungkan dalam model pertumbuhan populasinya. Dengan menggunakan kaidah logistik bahwa persediaan logistik terbatas, diasumsikan pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium*). Verhults memodifikasi model Malthus dengan syarat awal $\frac{K-N}{K}$ sehingga laju pertumbuhan menjadi :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \tag{2.12}$$

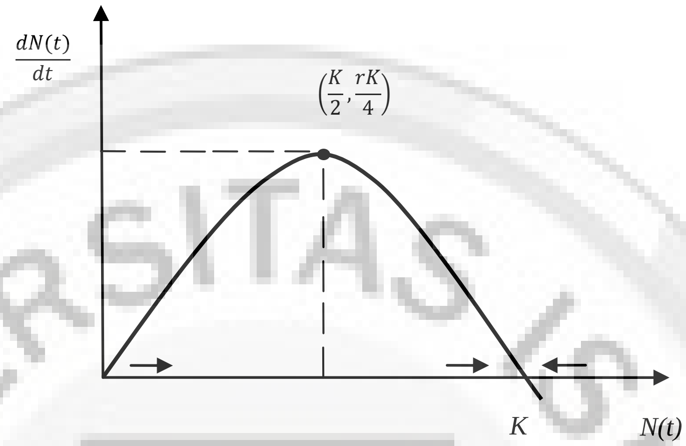
dengan K merupakan *carrying capacity*, diasumsikan bahwa nilai $K \geq N > 0$ (Mandiri, 2007).

Berdasarkan persamaan (2.12) laju pertumbuhan akan diperoleh keadaan sebagai berikut :

1. Pada saat $0 < N < K$, maka $\frac{N}{K}$ mendekati 0 sehingga $\frac{dN}{dt} \approx rN$ dan grafik populasi menaik menuju K. Kondisi ini nilai $\frac{dN}{dt}$ bernilai positif dan pertumbuhannya cepat akibatnya populasi akan bertambah menuju K.
2. Pada saat $N > K$, maka $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ bernilai negatif sehingga $\frac{dN}{dt} < 0$ dan grafik populasi menurun menuju K. Kondisi ini nilai $\frac{dN}{dt}$ bernilai negatif akibatnya populasi akan berkurang menuju K.

Sedangkan pada saat $N \to K$ (populasi menuju batas), maka $\frac{N}{K} \to 1$ sehingga $\frac{dN}{dt} \to 0$ dan grafik populasi mendekati K. Kondisi ini populasi terus bertambah tetapi nilai $\frac{dN}{dt}$ semakin lama mendekati 0 akibatnya pertumbuhan melambat dan populasi akan menuju K.

Jika persamaan (2.12) diformulasikan ke dalam bentuk grafik maka akan diperoleh grafik, seperti berikut :



Gambar 2.1 Grafik Laju Pertumbuhan Populasi Logistik

Pada gambar 2.1 di atas, grafik yang ditunjukkan berbentuk parabola dengan titik potong (0,0) dan (K,0) dengan titik puncak $\left(\frac{K}{2},\frac{rK}{4}\right)$. Titik puncak menunjukkan jumlah populasi maksimum pada waktu t.

Bentuk solusi umum dari persamaan (2.12) adalah :

$$\frac{dN(t)}{N(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)} = r\,dt$$

Kemudian kedua ruas diintegralkan sehingga diperoleh :

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)} = \int r\,dt$$

$$\int \frac{K}{N(t)(K-N(t))}\,dN(t) = \int r\,dt$$

Jika ruas kiri diselesaikan dengan cara manipulasi sebagai berikut :

$$\frac{K}{N(K-N)} = \frac{K-N+N}{N(K-N)}$$

$$= \frac{(K-N)}{N(K-N)} + \frac{N}{N(K-N)}$$

$$= \frac{1}{N} + \frac{1}{(K-N)}$$

Maka diperoleh :

$$\int \frac{K}{N(t)\big(K-N(t)\big)}\,dN(t) = \int \left[\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{K-N(t)}\right] dN(t)$$

$$= \ln N(t) - \ln(K - N(t))$$

Dengan demikian :

$$\int \frac{K}{N(t)\big(K-N(t)\big)}\,dN(t) = \int r\,dt$$

$$\ln N(t) - \ln(K - N(t)) = rt + C^*$$

$$\ln \frac{N(t)}{K-N(t)} = rt + C^*$$

$$\frac{N(t)}{K-N(t)} = e^{rt + c^*}$$

$$\frac{N(t)}{K-N(t)} = e^{rt}.e^{c^*}$$

$$\frac{N(t)}{K-N(t)} = Ce^{rt} \qquad (2.13)$$

dengan *C* merupakan e^{c^*}

Substitusikan $t = 0$ dan $N(0) = N_0$ yang merupakan jumlah populasi awal ke persamaan (2.13), diperoleh :

$$\frac{N_0}{K-N_0} = C \tag{2.14}$$

Kemudian persamaan (2.13) dapat disederhanakan sebagai berikut :

$$\frac{N(t)e^{-rt}}{C} = \left(K - N(t)\right)$$

$$N(t) + \frac{N(t)e^{-rt}}{C} = K$$

$$N(t)\left[1 + \frac{e^{-rt}}{C}\right] = K \tag{2.15}$$

Jika pesamaan (2.14) disubstitusikan ke persamaan (2.15) maka diperoleh :

$$N(t)\left[1 + \frac{e^{-rt}}{\frac{N_0}{K-N_0}}\right] = K$$

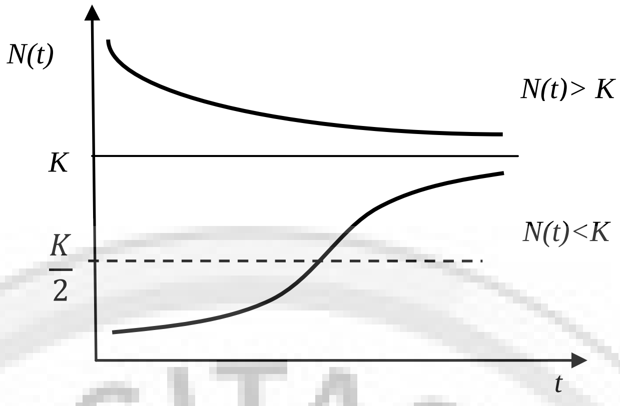
$$N(t) = \frac{K}{1+\frac{e^{-rt}}{\frac{N_0}{K-N_0}}}$$

$$N(t) = \frac{K}{1+\left(\frac{K-N_0}{N_0}\right)e^{-rt}}$$

Jadi bentuk solusi umum dari model pertumbuhan populasi logistik adalah :

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0+(K-N_0)e^{-rt}} \tag{2.16}$$

Jika persamaan (2.16) diformulasikan ke dalam sketsa grafik, maka diperoleh grafik seperti berikut :



Gambar 2.2 Sketsa Grafik Solusi Model Pertumbuhan Populasi Logistik

Berdasarkan gambar (2.2) diperoleh keadaan sebagaiberikut :

1. Pada saat $\frac{dN}{dt}$ positif dan naik sebagai fungsi dari N, maka fungsi N dari t juga naik, akibatnya grafik fungsi N terhadap t akan cekung ke atas. Oleh karena itu, pada saat $0 < N < \frac{K}{2}$ nilai $\frac{dN}{dt}$ positif dan naik akibatnya grafik fungsi *N(t)* naik dan cekung ke atas.
2. Pada saat $\frac{dN}{dt}$ positif dan turun sebagai fungsi dari N, maka fungsi N dari $t$akan naik akibatnya grafik fungsi N terhadap t akan cekung ke bawah. Oleh karena itu, pada saat $\frac{K}{2} < N < K$ nilai $\frac{dN}{dt}$ positif dan turun akibatnya grafik fungsi *N(t)* naik dan cekung ke bawah sehingga grafik solusi pada interval $0 < N < K$ membentuk "S" atau karakter sigmoid.
3. Pada saat $\frac{dN}{dt}$ negatif dan turun sebagai fungsi dari N, maka fungsi N dari t akan turun akibatnya grafik fungsi N terhadap t akan turun dan cekung ke atas. Oleh karena itu, pada saat $N > K$ nilai $\frac{dN}{dt}$ negatif dan turun akibatnya grafik fungsi *N(t)* turun dan cekung ke atas (Mandiri, 2007).

2.3 Model Pertumbuhan Populasi Logistik dengan Faktor Pemanenan

Populasi merupakan sumber daya yang dapat dikelola untuk menunjang kehidupan. Terjadinya pemanenan dalam suatu populasi berarti terjadi pengelolaan sumber daya oleh pihak lain (manusia). Misalnya, populasi ikan dibudidaya yang ditangkap oleh para pembudidaya untuk dikonsumsi atau diperjual-belikan.

Salah satu pertanyaan yang mendasar dalam pengelolaan sumber daya adalah bagaimana memanfaatkan sumber daya sehingga menghasilkan manfaat ekonomi yang tinggi bagi pengguna, namun kelestariannya tetap terjaga. Secara implisit pertanyaan tersebut memiliki dua makna, yaitu makna ekonomi dan makna biologi. Oleh karena itu makna bioekonomi dalam pengelolaan sumber daya harus dipahami. Istilah bioekonomi diperkenalkan oleh Scott Gordon seorang ahli ekonomi dari Kanada yang pertama kali menggunakan pendekatan ekonomi dalam pengelolaan sumber daya yang optimal. Scott Gordon menggunakan basis biologi yang sebelumnya sudah diperkenalkan oleh Schaefer (1954). Sehingga untuk memahami pendekatan bioekonomi pengelolaan sumber daya dikenal dengan model bioekonomi Gordon-Schaefer (Fauzi, 2005).

Secara biologi sumber daya dikatakan lestari apabila terjadinya keseimbangan antara laju pertumbuhan populasi dengan daya dukung lingkungannya. Laju pertumbuhan populasi dapat diketahui melalui sebuah model matematika yaitu model pertumbuhan populasi. Secara umum model pertumbuhan populasi dibagi menjadi dua yaitu model pertumbuhan populasi eksponensial dan logistik. Model pertumbuhan populasi logistik yang dikembangkan oleh Verhults sudah cukup realistis dengan melibatkan keterbatasan sumber daya di dalam modelnya, tetapi belum melibatkan faktor eksternal seperti pemanenan.

Model pendekatan biologi yang dikenalkan oleh Scaefer rmerupakan modifikasi dari model pertumbuhan populasi logistik Verhults dengan menambahkan faktor pemanenan di dalam modelnya, karena prinsip dasar dari model ini mengikuti prinsip dasar pertumbuhan populasi logistik.

Menurut Clark (1979) untuk mengetahui adanya pengaruh pemanenan dalam suatu populasi akan diberikan penjelasan sebagai berikut : Jika *g(N)* adalah fungsi pertumbuhan populasi, dan *h(N)* adalah fungsi pemanenan, maka fungsi pertumbuhan populasi dengan pemanenan adalah :

$$\frac{dN(t)}{dt} = g(N) - h(N) \tag{2.17}$$

dengan $g(N) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ dan $h(N) = \varepsilon Y$ maka diperoleh :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \varepsilon Y \tag{2.18}$$

dengan ε merupakan konstanta fungsi pemanenan yang memiliki rentang antara 0 sampai 1 yang menyatakan persentase antara 0% sampai 100%, sedangkan *Y* merupakan fungsi pemanenan (Alvendar, 2012).

Fungsi Pemanenan menurut Scaefer didefinisikan sebagai *Y* yang merupakan fungsi produksi Cobb-Douglas yang menggambarkan dua kuantitas, yaitu ukuran persediaan populasi pada waktu *t* dan tingkat usaha pemanenan sehingga :

$$Y = qN(t)E \tag{2.19}$$

dengan q merupakan koefisien kapabilitas atau koefisien kemampuan panen yang memiliki rentang antara 0 sampai 1, sedangkan E merupakan usaha manusia dalam pemanenan yang memiliki rentang antara 0 sampai 1 yang menyatakan persentase antara 0% sampai 100% (Idels, 2006).

Dalam model pertumbuhan populasi logistik dengan faktor pemanenan, usaha pemanenan *E* adalah ekspresi sederhana dari fungsi waktu *E* = *E(t)*, yang mana bukan efek dari melimpahnya populasi dalam usaha pemanenan, tetapi besar kecilnya usaha pemanenan pada waktu *t*. Berdasarkan pernyataan di atas maka asumsikan bahwa *E* merupakan fungsi dari populasi dinamik.

$$E\big(t, N(t)\big) = \alpha(t) - \beta(t)\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} \tag{2.20}$$

dengan α dan β merupakan fungsi kontinu dalam *t*. α menyatakan populasi yang dapat dipanen secara keseluruhan sedangkan β menyatakan sebagian populasi yang tidak dapat dipanen (Idels, 2006).

Diketahui $\alpha(t) \geq 0$ dan $\beta(t) \geq 0$ merupakan fungsi kontinu dalam *t*, tetapi pada perhitungan selanjutnya α dan β diasumsikan kostan dan memiliki rentang antara 0 sampai 1 yang menyatakan persentase antara 0% sampai 100%. Kemudian persamaan (2.20) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.19) sebagai berikut :

$$Y(t) = qN(t)\left(\alpha - \beta\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}\right) \tag{2.21}$$

Substitusikan persamaan (2.21) ke persamaan (2.18) sehingga diperoleh model pertumbuhan populasi logistik dengan faktor pemanenan sebagai berikut :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \varepsilon\left[qN(t)\left(\alpha - \beta\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}\right)\right] \quad (2.22)$$

(Idels, 2006).

2.4 Nilai Maksimum dan Minimum

Definisi 1 (nilai maksimum) :

Suatu fungsi $f: R \to R$ kontinu yang terdefinisi di daerah $D \subseteq R$ dikatakan memiliki nilai maksimum di x_0 jika dan hanya jika $f(x_0) \geq f(x)$ untuk semua nilai *x* di daerah *D*.

Definisi 2 (nilai minimum) :

Suatu fungsi $f: R \to R$ kontinu yang terdefinisi di daerah $D \subseteq R$ dikatakan memiliki nilai minimum di x_0 jika dan hanya jika $f(x_0) \leq f(x)$ untuk semua nilai *x* di daerah *D*.

Definisi 3 (nilai ekstrem) :

Nilai ekstrem dari *f* adalah suatu nilai maksimum atau nilai minimum dari fungsi *f*.

Teorema 2.1:

Jika f kontinu memiliki nilai ekstrem pada satu titik x_0*, dimana* $f'(x_0)$ *terdefinisi, maka* $f'(x_0) = 0$

Bukti :

Anggap f kontinu mempunyai nilai maksimum pada x_0, maka untuk $|\Delta x|$ yang cukup kecil $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ berarti $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$.

Pada saat $\Delta x < 0$ maka nilai $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} > 0$ sehingga :

$$f'(x_0) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

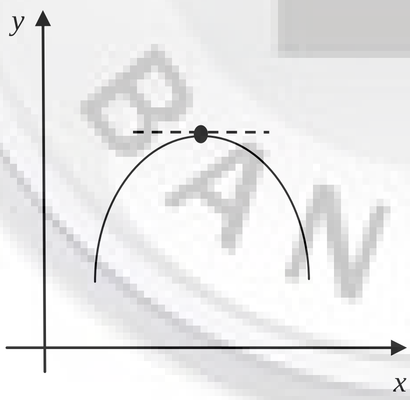
Pada saat $\Delta x > 0$ maka nilai $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} < 0$ sehingga :

$$f'(x_0) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

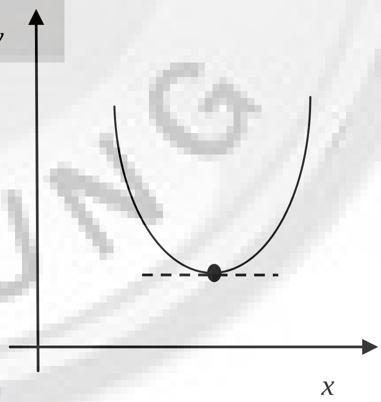
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

Karena $f'(x_0) \geq 0$ dan $f'(x_0) \leq 0$, maka$f'(x_0) = 0$ ■

Teorema ini berarti jika f kontinu diferensiabel pada suatu titik dimana fungsi ini memiliki nilai ekstrem, maka grafik f akan naik pada saat $f'(x_0) > 0$, akan turun pada saat $f'(x_0) < 0$, dan tidak naik dan tidak turun pada saat $f'(x_0) = 0$. Kondisi $f'(x_0) = 0$ merupakan kondisi grafik mencapai nilai ekstrim (maksimum/minimum). Contoh ditunjukkan pada gambar 2.3 dan gambar 2.4 sebagai berikut :



Gambar 2.3 Grafik Nilai Maksimum



Gambar 2.4 GrafikNilai Minimum

Berdasarkan gambar 2.3 dan 2.4 pada saat kurva cekung ke bawah maka titik balik kurva merupakan titik balik maksimum, sedangkan pada saat kurva cekung ke atas maka titik balik kurva merupakan titik balik minimum.

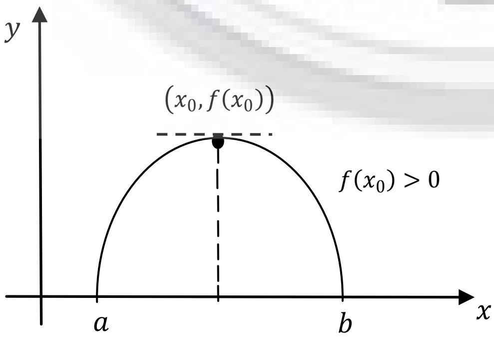
Teorema 2.2 :

Misalkan f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ *dan diferensiabel pada interval terbuka* (a, b). *Jika* $f(a) = f(b) = 0$, *maka* $f'(x_0) = 0$ *untuk paling tidak satu titik* x_0 *pada* (a, b).

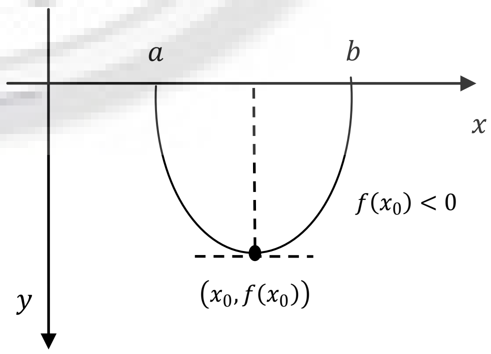
<u>Bukti</u> :

Jika $f(x) = 0$ sepanjang $[a, b]$, maka $f'(x) = 0$ untuk semua x pada (a, b). Untuk *f(x)* yang positif pada interval *(a,b)*, *f* memiliki suatu nilai maksimum pada titik x_0 di *[a,b]*. Nilai maksimum harus positif, maka x_0 terletak pada *(a,b)*, karena $f(a) = f(b) = 0$ sehingga *f* mempunyai nilai maksimum pada x_0 dan $f'(x_0) = 0$. Dengan cara yang serupa untuk *f(x)* yang negatif pada interval *(a,b)*, *f* memiliki suatu nilai minimum pada titik x_0 di *[a,b]*. Nilai minimum harus negatif, maka x_0 terletak pada *(a,b)*, karena $f(a) = f(b) = 0$ sehingga *f* mempunyai nilai minimum pada x_0 dan $f'(x_0) = 0$. ■

Teorema ini berarti jika grafik fungsi memotong sumbu *x* pada $x = a$ dan $x = b$, dan fungsi tersebut diferensiabel antara *a* dan *b*, maka ada sedikitnya satu titik nilai maksimum/minimum. Contoh ditunjukkan pada gambar 2.5 dan 2.6 sebagai berikut :



Gambar 2.5 Grafik Nilai Maksimum pada Interval [a,b]



Gambar 2.6 Grafik Nilai Minimum pada Interval [a,b]