BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Model Pertumbuhan Populasi Secara Eksponen

Metode Gauss-Seidel adalah metode untuk menentukan solusi numerik dari SPL secara iteratif. Syarat cukup untuk mencapai kekonvergenan dalam Gauss-Seidel yaitu harus bersifat SDD (*Stricly Diagonally Dominant*) atau memuat koefisien diagonal matriks yang dominan

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Misal diberikan himpunan n persamaan:

$$[A](X) = (b)$$

di mana:

A : Matriks koefisien dari SPL,

X : vektor variabel,

b : vektor konstanta yang tidak nol.

Jika elemen-elemen diagonal semuanya tak nol, persamaan pertama dapat diselesaikan untuk x_1, persamaan kedua untuk x_2, dan seterusnya sehingga menghasilkan:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \tag{3.1a}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \tag{3.1b}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \cdots - a_{3n}x_n}{a_{33}} \qquad (3.1c)$$

.
.
.

$$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \qquad (3.1d)$$

Untuk proses penyelesaiannya dapat dimulai dengan memakai terkaan untuk bentuk-bentuk x_i untuk i = 1, 2, ..., n. Cara yang mudah untuk memperoleh terkaan awal adalah dengan mengasumsikan bahwa nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah nol, yang selanjutnya dapat disubstitusikan ke Persamaan $(3.1a)$ yang dipakai untuk menghitung nilai baru untuk $x_1 = {}^{b_1}/_{a_{11}}$. Kemudian, nilai baru x_1 ini disubstitusikan ke Persamaan $(3.1b)$ bersama dengan terkaan-terkaan nol sebelumnya untuk $x_3, \ldots, x_n$, untuk menghitung nilai baru x_2 dan seterusnya proses tersebut diulangi untuk tiap persamaan sampai persamaan $(3.1d)$ dipakai menghitung suatu taksiran baru x_n. Kemudian kembali ke persamaan pertama dan mengulangi keseluruhan prosedurnya sampai penyelesaian konvergen.

Dari persamaan $(3.1a)$ sampai $(3.1d)$ secara umum dapat dirumuskan untuk iterasi ke-k pada metode Gauss-Seidel sebagai berikut. Untuk i=1,2,...,n dan k=1,2,3,...

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right] \qquad (3.2)$$

Untuk mengaproksimasi solusi dari SPL dapat dijelaskan sebagai berikut:

Misal $\bar{x} \in R^n$ adalah nilai aproksimasi untuk solusi dari sebuah sistem linear yang didefinisikan oleh $A\bar{x} = b$, maka vektor residu untuk $\bar{x}$ sehubungan dengan sistem adalah $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - A\bar{\boldsymbol{x}}$.

Berdasarkan uraian di atas, dalam perhitungan metode Gauss-seidel untuk menghitung nilai hampiran x_i pada iterasi ke-k maka digunakan nilai $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ dari iterasi ke-k dan $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ dari iterasi ke-$(k-1)$. Misalkan vektor-vektor yang digunakan untuk mencari nilai x_i pada iterasi ke-k didefinisikan dengan:

$$\boldsymbol{x}_i^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}\right)^t$$

maka vektor residu untuk metode Gauss-Seidel yang bersesuaian dengan vektor solusi $\boldsymbol{x}_i^{(k)}$ adalah:

$$\boldsymbol{r}_i^{(k)} = \left(r_{1i}^{(k)}, r_{2i}^{(k)}, \dots, r_{ni}^{(k)}\right)$$

Komponen ke-m dari $\boldsymbol{r}_i^{(k)}$ adalah:

$$r_{mi}^{(k)} = \left[b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{mj}x_j^{(k-1)}\right]$$

atau sama dengan

$$r_{mi}^{(k)} = \left[b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{mj}x_j^{(k-1)} - a_{mi}x_i^{(k-1)}\right] \qquad (3.3)$$

Untuk $m = 1, 2, \dots, n$.

Khususnya, untuk komponen ke-i dari $r_i^{(k)}$ adalah

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} - a_{ii}x_i^{(k-1)}$$

Maka

$$a_{ii}x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} \tag{3.4}$$

Mengingat sebelumnya pada persamaan (3.2) $x_i^{(k)}$, didefinisikan dengan:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]$$

maka persamaan (3.4) akan menjadi:

$$a_{ii}x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = a_{ii}x_i^{(k)}$$

Akibatnya, Metode Gauss-Seidel dapat dikarakteristikan dengan memilih $x_i^{(k)}$ untuk memenuhi:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \tag{3.5}$$

Misal terdapat matriks *A*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & nn \end{bmatrix}$$

Selanjutnya memisahkan matriks *A* ke dalam unsur diagonal dan unsur bukan diagonalnya, misal *D* merupakan matriks diagonal dari matriks *A*, -*L* matriks segitiga bawah dari *A* dan –*U* matriks segitiga atas dari *A*. Matriks *A* diubah ke dalam bentuk:

$$A = D - L - U \tag{3.6}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $A_x = \boldsymbol{b}$ atau $(D-L-U)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ diubah ke dalam bentuk

$$D\boldsymbol{x} = (L+U)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

dan jika $a_{ii} \neq 0$ untuk setiap i, maka

$$\boldsymbol{x} = D^{-1}(L+U)\boldsymbol{x} + D^{-}\boldsymbol{b}$$

Dimisalkan $T_j = D^{-1}(L+U)$ dan $c_j = D^{-1}\boldsymbol{b}$ maka:

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = T_j\boldsymbol{x}^{(k-1)} + c_j$$

Merujuk pada persamaan (3.2) Untuk merumuskan metode Gauss-Seidel dalam bentuk matriks yaitu dengan menggandakan kedua sisi dari persamaan di atas dengan a_{ii} dan kumpulkan semua iterasi ke-k, untuk memberikan:

$$a_{i1}x_1^{(k)} + a_{i2}x_2^{(k)} + \dots + a_{ii}x_i^{(k)} = -a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} - \dots - a_{in}x_n^{(k-1)} + b_i$$

Untuk i = 1, 2, . . . , n. Pada persamaan ke-n dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k)} &= -a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\ a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} &= -a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \dots + a_{nn}x_n^{(k)} &= b_n \end{aligned}$$

Sehingga metode Gauss Seidel bisa direpresentasikan menjadi:

$$(D-L)\boldsymbol{x}^{(k)} = U\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{b}$$

dan untuk k = 1, 2, . . . , n

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = (D-L)^{-1}U\boldsymbol{x}^{(k-1)} + (D-L)^{-1}\boldsymbol{b}$$

Misal $T_g = (D-L)^{-1}U$dan $\boldsymbol{c}_g = (D-L)^{-1}\boldsymbol{b}$, sehingga metode Gauss-Seidel dalam bentuk matriks menjadi:

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = T_g\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{c}_g$$

Kekonvergenan dapat diperiksa dengan memakai kriteria

$$|\varepsilon_{a,i}| = \left|\frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j}\right| x100\% < \varepsilon_s$$

Di mana:

$|\varepsilon_{a,i}|$ = Galat Relatif,

ε_s = galat yang ditetapkan.

Untuk semua i, di mana j dan j-1 masing-masing adalah iterasi-iterasi yang sekarang dan sebelumnya. Nilai x baru yang dihitung untuk metode Gauss-Seidel, segera dipakai dalam persamaan berikutnya untuk menentukan nilai x lainnya.

Adakalanya suatu SPL yang mempunyai solusi namun tidak konvergen jika menggunakan metode Gauss-Seidel karena tidak memenuhi sifat SDD. Untuk mengatasi hal tersebut, bisa dilakukan dengan cara melakukan pemodifikasi metode Gauss-Seidel pada persamaan (3.5), dimodifikasi menjadi:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \quad (3.7)$$

dimana ω adalah faktor pembobotan.

Persamaan (3.7) dapat dirumuskan kembali menjadi:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}$$

$$= x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} - a_{ii}x_i^{(k-1)}\right]$$

$$= x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}} b_i - \frac{\omega}{a_{ii}}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} - \omega x_i^{(k-1)}$$

$$= (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}} b_i - \frac{\omega}{a_{ii}}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}$$

$$= (1-\ \omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]$$

Maka diperoleh:

$$x_i^{(k)} = (1-\ \omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right] \quad (3.8)$$

Dalam penelitian ini, rumus di atas disebut dengan metode Gauss-Seidel yang termodifikasi atau metode Relaksasi.

Diberikan suatu sistem persamaan linear

$$Ax = b$$

Kemudian matriks A dirubah kedalam bentuk

$$A = M - N$$

di mana M adalah matriks yang dapat dibalik. Dengan memilih $M = \frac{D}{\omega} - L$ maka:

$$A = \left\{\frac{D}{\omega} - L\right\} - \left\{\frac{1-\omega}{\omega}D + U\right\}$$

$$Ax = b$$

$$\left[\left\{\frac{D}{\omega} - L\right\} - \left\{\frac{1-\omega}{\omega}D + U\right\}\right]x = b$$

$$\left\{\frac{D}{\omega} - L\right\} x^{(k)} = \left\{\frac{1-\omega}{\omega} D + U\right\} x^{(k-1)} + b$$

Sehingga dalam bentuk vektor, didapat:

$$(D - \omega L)\boldsymbol{x}^{(k)} = [(1-\omega)D + \omega U]\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \omega \boldsymbol{b}$$

Ini berarti:

$$x^{(k)} = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \omega(D - \omega L)^{-1}\boldsymbol{b}$$

Misalkan $T_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$ dan

$\boldsymbol{c}_\omega = \omega(D - \omega L)^{-1}\boldsymbol{b}$ sehingga pemodifikasian dari metode Gauss-Seidel

menjadi:

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = T_\omega \boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{c}_\omega \tag{3.9}$$

Simbol ω adalah faktor pembobotan untuk pemodifikasian metode Gauss-Seidel.

3.2 Menentukan $\boldsymbol{\omega}$

Untuk menentukan nilai ω yang tepat dari persamaan (3.9) akan dijelaskan sebagaimana dituangkan dalam teorema di bawah ini:

Teorema 3.2-1 (Kahan)

Jika $a_{ii} \neq 0$ untuk i = 1,2,. . . ,n, maka $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$. Ini mengakibatkan Pemodifikasian Gauss-Seidel dapat konvergen hanya jika $0 < \omega < 2$

Bukti :

Akan dibuktikan $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$

Polinom karakteristik dari T_ω adalah $p(\lambda) = \det(\lambda I - T_\omega)$

$= \det[(\lambda I - T_\omega)]$

$= \det[(\lambda I - ((D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U])]$ $\quad$ *dikali* $\det(D - \omega L)$

$= \det\left[(\mathrm{D} - \omega\mathrm{L})\lambda I - \left((1-\omega)D + \omega U\right)\right]$

$= \det\left[\lambda D - \omega\lambda L - \left((1-\omega)D + \omega U\right)\right]$

$= \det[(\lambda + \omega - 1)D - \omega\lambda L - \omega U]$

$= \det[(\lambda + \omega - 1)I - D^{-1}\omega\lambda L - D^{-1}\omega U]$

Jadi

$$p(0) = \pm \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(T_\omega) = \det(T_w) = \pm \det\left((\omega - 1)I\right) = \pm(\omega - 1)^n$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(T_\omega)\right)^{1/n} = \pm(\omega - 1)$$

Maka terbukti

$$\rho(T_\omega) \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(T_\omega)\right)^{1/n} = |(\omega - 1)|$$

Jika ω=1, maka $(1-\omega)$ sama dengan nol sehingga nilai x_i sama dengan metode Gauss-Seidel tanpa modifikasi. ω yang diberi suatu nilai antara 0 dan1 secara khas diterapkan untuk membuat suatu sistem yang tidak konvergen menjadi konvergen. Untuk nilai-nilai ω mulai 1 sampai 2, bobot ekstra ditempatkan pada nilai yang sekarang. Dalam hal ini, terdapat asumsi implisit bahwa nilai yang baru bergerak ke arah yang benar menuju ke penyelesaian sejati tetapi pada laju yang agak lambat. Jadi, tambahan bobot ω dimaksudkan untuk memperbaiki taksiran dengan mendorongnya lebih mendekati kebenaran dan dirancang untuk mempercepat kekonvergenan dari sistem yang memang sudah konvergen.

Contoh 1:

$2x_1 - 5x_2 + x_3 \quad = 12$

$-x_1 + 3x_2 - x_3 \quad = -8$

$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \quad = 16$

Nilai eksak untuk SPL di atas adalah $x^t = [2, -1, 3]$

Akan diperiksa apakah SPL di atas bersifat SDD dan untuk menentukan solusi numeriknya bisa menggunakan metode Gauss-Seidel atau tidak.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Syarat cukup kekonvergenan:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

$|a_{11}| = |2| = 2 < |a_{12}| + |a_{13}| = |-5| + |1| = 6$

$|a_{22}| = |3| = 3 > |a_{21}| + |a_{23}| = |-1| + |-1| = 2$

$|a_{33}| = |2| = 2 < |a_{31}| + |a_{32}| = |3| + |-4| = 7$

Karena tidak semua koefisien matriks diagonalnya dominan, maka dapat disimpulkan SPL di atas tidak bersifat SDD sehingga tidak akan konvergen jika menggunakan metode Gauss-Seidel.

Untuk menyelesaikan SPL di atas, akan digunakan metode Gauss-Seidel yang termodifikasi dan merujuk kepada teorema 3.2-1 (kahan) bahwa nilai pembobotan yang digunakan adalah $0 < \omega < 2$. Dalam perhitungannya dilakukan melalui simulasi dengan pemilihan ω dibagi ke dalam enam bagian, yaitu dengan menggunakan ω antara 0 sampai 0.5 secara acak, $\omega = 0.5$, ω antara 0.5 sampai 1 secara acak, ω antara 1 sampai 1.5 secara acak, ω=1.5 dan ω antara 1.5 sampai 2 secara acak.

Setelah melakukan simulasi dengan menggunakan program Matlab, untuk ω antara 0 sampai 0.5 dan dengan kriteria yang ditetapkan $\varepsilon_s = 1\%$. Perbedaannya terlihat dalam jumlah iterasi dan galat aproksimasi yang dihasilkan, di mana jika nilai ω semakin dekat ke nol jumlah iterasi cenderung semakin banyak namun nilai aproksimasi dan galat aproksimasi yang dihasilkan masih kurang dalam hal mendekati nilai eksaknya. Kemudian untuk $\omega = 0.5$ menghasilkan 102 iterasi dengan

$x_1 = 1.888307 \ (0.09217\%)$,

$x_2 = -1.0222111(\ 0.86517\%)$, dan

$\mathrm{x}_3 = 3.0973536 \ (\ 0.83177\%)$

nilai aproksimasi dan galat aproksimasi yang dihasilkan mendekati nilai eksaknya.

Namun untuk $\omega \geq 0.75$ terjadi error, dimana iterasi tidak mau berhenti, hal ini dikarenakan jika ω mendekati satu, hasil yang diperoleh sama dengan metode Gauss-Seidel yang tidak dimodifikasi, sama halnya jika memilih $\omega > 1$ dalam perhitungannya terjadi error, karena SPL di atas merupakan SPL yang tidak konvergen, sebagaimana penjelasan sebelumnya pemilihan ω yang cocok untuk permasalah ini adalah dengan memilih $0 < \omega < 1$ di mana interval ω tersebut digunakan untuk menyelesaikan solusi SPL yang tidak konvergen menjadi konvergen.

Namun dalam kasus lain, jika suatu matriks A merupakan matriks definit positif dan tridiagonal, ada suatu cara untuk pemilihan ω yang cocok untuk menyelesaikan solusinya, sebagaimana teorema di bawah ini:

Teorema 3.2-2

Jika A adalah matrik definit positif dan tridiagonal, maka $\rho(T_g) = [\rho(T_j)]^2 < 1$ dan cara optimal untuk menentukan nilai ω pada metode relaksasi adalah

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}}$$

Bukti:

Diketahui $T_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$

Polinom karakteristik dari T_ω adalah $p(\lambda) = \det|\lambda I - T_\omega|$

$= \det[(T_\omega - \lambda I)]$

$= \det[((D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]) - \lambda I]$ $\quad$ *dikali* $\det\ (D - \omega L)$

$= \det\left[\left((1-\omega)D + \omega U\right) - (\mathrm{D} - \omega\mathrm{L})\lambda I\right]$

$= \det\left[\left((1-\omega)D + \omega U\right) - D\lambda + \omega\lambda I\right]$

$= \det[(1-\omega-\lambda)D + \omega\lambda L + \omega U]$

Untuk menghitung λ, maka:

$\det[(1-\omega-\lambda)D + \omega\lambda L + \omega U] = 0\ ,\ \omega \neq 0$

$$\det\left[\left(\frac{(1-\omega-\lambda)}{\omega\sqrt{\lambda}}D + \sqrt{\lambda}L + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}U\right)\omega\sqrt{\lambda}\right] = 0$$

$$\det\left[\left(\sqrt{\lambda}D^{-1}L + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}D^{-1}U + \frac{(1-\omega-\lambda)}{\omega\sqrt{\lambda}}I\right)\right] = 0$$

$$\det\left[\left(\sqrt{\lambda}D^{-1}L + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}D^{-1}U - \frac{(\lambda+\omega-1)}{\omega\sqrt{\lambda}}I\right)\right] = 0$$

$\sqrt{\lambda}D^{-1}L + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}D^{-1}U$ Memenuhi persamaan $D^{-1}(L+U) = T_j$

Misalkan nilai eigen dari T_j adalah μ, maka nilai eigen tak nol dari T_ω dapat dihitung dari:

$$\mu = \frac{(\lambda + \omega - 1)}{\omega\sqrt{\lambda}}$$

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda\omega^2\mu^2$$

Jika $\omega = 1$ maka ekuivalen dengan metode Gauss-Seidel, maka $\mu = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ atau $\lambda = \mu^2$

Untuk $\omega \neq 0$ maka diperoleh:

$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda\omega^2\mu^2$

$\lambda^2 + 2\lambda(\omega - 1) + (\omega - 1)^2 = \lambda\omega^2\mu^2$

$\lambda^2 + 2\lambda(\omega - 1) + (\omega - 1)^2 - \lambda\omega^2\mu^2 = 0$

$\lambda^2 + \lambda[2(\omega - 1) - \omega^2\mu^2] + (\omega - 1)^2 = 0$

$\lambda = -(\omega - 1) + \frac{\omega^2\mu^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega - 1)^2 - 4(\omega - 1)\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)^2 + \omega^4\mu^4}$

$\lambda = (1 - \omega) + \frac{\omega^2\mu^2}{2} \pm \sqrt{(1 - \omega)\omega^2\mu^2 + \frac{\omega^4\mu^4}{4}}$

$\lambda = (1 - \omega) + \frac{\omega^2\mu^2}{2} \pm \omega\mu\sqrt{(1 - \omega) + \frac{\omega^2\mu^2}{4}}$

Untuk mempercepat kekonvergenan membutuhkan $\rho(T_\omega)$ untuk menjadi sekecil mungkin, hal ini dapat menunjukan bahwa hasil yang terbaik adalah untuk membuat akar dari $\rho(T_\omega)$ sama ketika $\mu = \rho(T_j)$ misalnya ketika μ besar. Ini berarti:

$$\frac{\omega^2\mu^2}{4} - \omega + 1 = 0$$

Penyelesaian untuk nilai ω adalah:

$$\omega = \frac{1 \pm \sqrt{1-\mu^2}}{\mu^2/_2}$$

$$= \frac{2}{\mu^2}\left(\frac{1-(1-\mu^2)}{1 \mp \sqrt{1-\mu^2}}\right)$$

$$= \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-\mu^2}}$$

Untuk mencari nilai terkecil dari ω yaitu dengan mempositifkan akar dari persamaan di atas, misalnya dengan $\mu = \rho(T_j)$, pilihan terbaik untuk ω adalah:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\rho(T_j)\right)^2}}$$

Contoh 2:

Pandang Sistem Persamaan Linear di bawah ini:

$4x_1 + 3x_2 \qquad = 24$

$3x_1 + 4x_2 - x_3 \quad = 30$

$\qquad -x_2 + 4x_3 \quad = -24$

Dengan nilai eksak $(3,4,-5)^t$

Akan diperlihatkan penyelesaian SPL di atas dengan menggunakan metode Gauss-Seidel dan metode pemodifikasian Gauss-Seidel (Relaksasi)

- Dengan Metode Gauss-Seidel dengan $e_s = 0.01\%$

Tabel 3.1 Hasil Perhitungan dengan menggunakan metode Gauss-Seidel

Iterasi		x_1	x_2	x_3
1		6.00000	3.00000	-5.25000
2	Nilai Aproksimasi	3.75000	3.37500	-5.15625
	Galat Aproksimasi	60.00000%	11.11111%	1.81818%
3	Nilai Aproksimasi	3.46875	3.60938	-5.09766
	Galat Aproksimasi	8.10811%	6.49351%	1.14943%
4	Nilai Aproksimasi	3.29297	3.75586	-5.06104
	Galat Aproksimasi	5.33808%	3.90016%	0.72359%
5	Nilai Aproksimasi	3.18311	3.84741	-5.03815
	Galat Aproksimasi	3.45145%	2.37959%	0.45430%
6	Nilai Aproksimasi	3.11444	3.90463	-5.02384
	Galat Aproksimasi	2.20472%	1.46545%	0.28474%
7	Nilai Aproksimasi	3.07153	3.94040	-5.01490
	Galat Aproksimasi	1.39720%	0.90759%	0.17828%
8	Nilai Aproksimasi	3.04470	3.96275	-5.00931
	Galat Aproksimasi	0.88094%	0.56405%	0.11155%
9	Nilai Aproksimasi	3.02794	3.97672	-5.00582
	Galat Aproksimasi	0.55364%	0.35129%	0.06977%
10	Nilai Aproksimasi	3.01746	3.98545	-5.00364
	Galat Aproksimasi	0.34722%	0.21908%	0.04362%
11	Nilai Aproksimasi	3.01091	3.99091	-5.00227
	Galat Aproksimasi	0.21749%	0.13674%	0.02727%
12	Nilai Aproksimasi	3.00682	3.99432	-5.00142
	Galat Aproksimasi	0.13611%	0.08539%	0.01705%
13	Nilai Aproksimasi	3.00426	3.99645	-5.00089
	Galat Aproksimasi	0.08514%	0.05334%	0.01066%
14	Nilai Aproksimasi	3.00266	3.99778	-5.00056
	Galat Aproksimasi	0.05324%	0.03333%	0.00666%
15	Nilai Aproksimasi	3.00167	3.99861	-5.00035
	Galat Aproksimasi	0.03329%	0.02082%	0.00416%
16	Nilai Aproksimasi	3.00104	3.99913	-5.00022
	Galat Aproksimasi	0.02081%	0.01301%	0.00260%
17	Nilai Aproksimasi	3.00065	3.99946	-5.00014
	Galat Aproksimasi	0.01301%	0.00813%	0.00163%
18	Nilai Aproksimasi	3.00041	3.99966	-5.00008
	Galat Aproksimasi	0.00813%	0.00508%	0.00102%

- Dengan metode pemodifikasian Gauss-Seidel (Relaksasi)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Akan diperiksa terlebih dahulu bahwa matriks di atas merupakan matriks definit positif sebagaimana menurut *teorema 2.2-1*

$$\det(A) = 24, \quad det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 7 \quad dan \quad \det([4]) = 4$$

Terbukti matiks A bersifat definit positif karena semua determinan matriks utamanya bernilai positif.

Kemudian diketahui

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian:

$$T_j - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -0.75 & 0 \\ -0.75 & -\lambda & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Maka

$$\det(T_j - \lambda I) = \left| \begin{matrix} -\lambda & -0.75 & 0 \\ -0.75 & -\lambda & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -\lambda \end{matrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \begin{matrix} -\lambda & -0.75 \\ -0.75 & -\lambda \\ 0 & 0.25 \end{matrix} \right|$$

$$= (-\lambda \times -\lambda \times -\lambda) + (-0.75 \times 0.25 \times 0) + (0 \times -0.75 \times 0) - (0 \times -\lambda \times 0)$$

$$- (-\lambda \times 0.25 \times 0.25) + (-0.75 \times -0.75 \times -\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 0 + 0 - 0 - 0.625\lambda + 0.5625$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 0.625) + 0.5625$$

$$\det(T_j - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 0.625) + 0.5625 = 0$$

diperoleh

$$\lambda = 0 \; dan \; \lambda = \sqrt{0.625}$$

maka

$$\rho(T_j) = \max|\lambda(T_j)| = \sqrt{0.625}$$

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 0.625}} \approx 1.25$$

Ini menjelaskan bahwa untuk mempercepat kekonvergenan pada SPL di atas adalah dengan menggunakan $\omega = 1.25$ dan $e_s = 0.01\%$

- Hasil yang diperoleh dengan menggunakan Metode Relaksasi

Tabel 3.2 Hasil perhitungan dengan menggunakan metode Relaksasi

Iterasi		x_1	x_2	x_3
1		6.3125000	3.5195313	-6.6501465
2	Nilai Aproksimasi	2.6223145	3.9585266	-4.6004238
	Galat Aproksimasi	140.72247%	11.08987%	44.55508%
3	Nilai Aproksimasi	3.1333027	4.0102646	-5.0966863
	Galat Aproksimasi	16.30829%	1.29014%	9.73696%
4	Nilai Aproksimasi	2.9570512	4.0074838	-4.9734897
	Galat Aproksimasi	5.96038%	0.06939%	2.47707%
5	Nilai Aproksimasi	3.0037211	4.0029250	-5.0057135
	Galat Aproksimasi	1.55374%	0.11389%	0.64374%
6	Nilai Aproksimasi	2.9963276	4.0009262	-4.9982822
	Galat Aproksimasi	0.24675%	0.04996%	0.14868%
7	Nilai Aproksimasi	3.0000498	4.0002586	-5.0003486
	Galat Aproksimasi	0.12407%	0.01669%	0.04133%
8	Nilai Aproksimasi	2.9997451	4.0000653	-4.9998924
	Galat Aproksimasi	0.01016%	0.00483%	0.00912%
9	Nilai Aproksimasi	3.0000025	4.0000150	-5.0000222
	Galat Aproksimasi	0.00858%	0.00126%	0.00260%

dari kedua metode di atas, terlihat bahwa dengan metode relaksasi atau pemodifikasian Gauss-Seidel proses untuk mencapai solusi yang konvergen ke nilai eksak lebih cepat dibandingkan dengan metode Gauss-Seidel tanpa modifikasi.

Contoh 3:

Pandang SPL di bawah ini:

$$5x_1 - x_2 \qquad\qquad = 15$$

$$-x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad = 23$$

$$+2x_2 + 4x_3 \quad = 22$$

Dengan nilai eksak $(4\,,5,3)^t$

Akan diperlihatkan penyelesaian SPL di atas dengan menggunakan metode Gauss-Seidel dan metode pemodifikasian Gauss-Seidel (Relaksasi)

- Dengan Metode Gauss-Seidel dengan $e_s = 0.01\%$

Tabel 3.3 Hasil Perhitungan dengan menggunakan metode Gauss-Seidel

Iterasi		x_1	x_2	x_3
1		3.00000	6.50000	2.25000
2	Nilai Aproksimasi	4.30000	5.70000	2.65000
	Galat aprokismasi	30.23256%	14.03509%	15.09434%
3	Nilai Aproksimasi	4.14000	5.46000	2.77000
	Galat aprokismasi	3.86473%	4.39560%	4.33213%
4	Nilai Aproksimasi	4.09200	5.38800	2.80600
	Galat aprokismasi	1.17302%	1.28297%	1.33630%
5	Nilai Aproksimasi	4.07760	5.36640	2.81680
	Galat aprokismasi	0.35315%	0.40250%	0.38341%
6	Nilai Aproksimasi	4.07328	5.35992	2.82004
	Galat aprokismasi	0.10606%	0.12090%	0.11489%
7	Nilai Aproksimasi	4.07198	5.35798	2.82101
	Galat aprokismasi	0.03183%	0.03628%	0.03446%
8	Nilai Aproksimasi	4.07160	5.35739	2.82130
	Galat aprokismasi	0.00955%	0.01089%	0.01034%

9	Nilai Aproksimasi	4.07148	5.35722	2.82139
	Galat aprokismasi	0.00286%	0.00327%	0.00310%

- Dengan metode pemodifikasian Gauss-Seidel (Relaksasi)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Akan diperiksa terlebih dahulu bahwa matriks di atas merupakan matriks definit positif sebagaimana menurut *teorema 2.2-1*

$$\det(A) = 56, \quad det \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 21 \quad dan \quad \det([5]) = 5$$

Terbukti matiks A bersifat definit positif karena semua determinan matriks utamanya bernilai positif

Kemudian diketahui

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian:

$$T_j - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1/5 & 0 \\ 1/4 & -\lambda & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Maka

$$\det(T_j - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/5 & 0 & \vdots & -\lambda & 1/5 \\ 1/4 & -\lambda & -1/2 & \vdots & 1/4 & -\lambda \\ 0 & -1/2 & -\lambda & \vdots 0 & & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda \times -\lambda \times -\lambda) + \left(1/5 \times -1/2 \times 0\right) + \left(0 \times 1/4 \times -1/2\right) - (0 \times -\lambda \times 0)$$

$$-\left(-\lambda \times -1/2 \times -1/2\right) + \left(1/5 \times 1/4 \times -\lambda\right)$$

$$= -\lambda^3 + 0 + 0 - 0 + 1/4\,\lambda + 1/20\,\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 6/20\,\lambda$$

$$\det(T_j - \lambda I) = -\lambda^3 + 6/20 = -\lambda(\lambda^2 - 6/20) = 0$$

diperoleh

$$\lambda = 0 \; dan \; \lambda = \sqrt{6/20}$$

maka

$$\rho(T_j) = \max|\lambda(T_j)| = \sqrt{6/20}$$

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 6/20}} \approx 1.09$$

Ini menjelaskan bahwa untuk mempercepat kekonvergenan pada SPL di atas adalah dengan menggunakan $\omega = 1.09$ dan $e_s = 0.01\%$

- Hasil yang diperoleh dengan menggunakan Metode Relaksasi

Tabel 3.4 Hasil Perhitungan dengan menggunakan metode Relaksasi

Iterasi		x_1	x_2	x_3
1		3.3980000	6.5584550	2.3306420
2	Nilai Aproksimasi	4.3939232	5.6043832	2.7308534
	Galat Aproksimasi	22.66592%	17.02367%	14.65518%
3	Nilai Aproksimasi	4.0963025	5.3910328	2.8111103
	Galat Aproksimasi	7.26559%	3.95750%	2.85499%

4	Nilai Aproksimasi	4.0765779	5.3611194	2.8201900
	Galat Aproksimasi	0.48385%	0.55797%	0.32195%
5	Nilai Aproksimasi	4.0718320	5.3575699	2.8213073
	Galat Aproksimasi	0.11655%	0.06625%	0.03960%
6	Nilai Aproksimasi	4.0714854	5.3571860	2.8214160
	Galat Aproksimasi	0.00851%	0.00717%	0.00385%

dari kedua metode di atas, terlihat bahwa dengan metode relaksasi atau pemodifikasian Gauss-Seidel proses untuk mencapai solusi yang konvergen ke nilai eksak lebih cepat dibandingkan dengan metode Gauss-Seidel tanpa modifikasi.