BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Deret Taylor

Deret Taylor dinamai berdasarkan seorang matematikawan Inggris, Brook Taylor (1685-1731) dan deret Maclaurin dinamai berdasarkan matematikawan Skotlandia, Colin Maclaurin (1698-1746), meskipun pada kenyataannya deret Maclaurin hanya kasus khusus dari deret Taylor. Akan tetapi, gagasan mempresentasikan fungsi-fungsi tertentu sebagai jumlah dari deret pangkat berasal dari Newton, dan deret Taylor yang umum diperkenalkan oleh matematikawan Skotlandia James Gregory di tahun 1668 dan oleh matematikawan Swiss John Bernoulli di tahun 1690-an.

Deret Taylor ini penting karena deret Taylor memungkinkan untuk mengintegralkan fungsi-fungsi yang tidak dapat diselesaikan sebelumnya dengan cara menyatakannya sebagai deret pangkat terlebih dahulu, kemudian mengintegralkan deretnya suku demi suku.

Teorema 2.1 (Purcell, 2007:241)

Misalkan f fungsi yang turunan ke-(n+1), yaitu $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk masing-masing x dalam interval terbuka I yang mengandung a. Maka untuk masing-masing x dalam I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

dengan sisa (atau galat) $R_n(x)$ diberikan oleh rumus

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

dan c suatu titik diantara x dan a.

Teorema di atas menunjukkan bahwa galat seperti apa yang akan terjadi ketika mengaproksimasi fungsi dengan sejumlah berhingga suku dari deret Taylornya.

Teorema 2.2 (Purcell, 2007:241)

Misalkan f adalah fungsi dengan turunan semua tingkat dalam interval $(a-r, a+r)$. Deret Taylor

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

menyatakan fungsi *f* pada interval $(a-r, a+r)$ jika dan hanya jika

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

di mana $R_n(x)$ adalah sisa dalam Rumus Taylor

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

dan *c* suatu titik di dalam $(a-r, a+r)$.

Deret Taylor tersebut tidak dapat digunakan secara langsung untuk mengaproksimasi fungsi seperti e^x atau tan *x*. Namun, pemenggalan deret Taylor, yaitu memenggal deret setelah berhingga suku, menuju ke polinomial yang dapat digunakan untuk mengaproksimasi suatu fungsi. Polinomial-polinomial seperti ini disebut polinomial Taylor.

Polinom Taylor Orde 1. Suatu fungsi f dapat diaproksimasi dekat titik a oleh garis singgungnya yang melalui titik $(a, f(a))$. Garis singgung tersebut dapat disebut sebagai aproksimasi linear terhadap *f* dekat a dan akan diperoleh

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Polinom Taylor Orde n. Penjumlahan sampai suku-suku yang berorde lebih tinggi dalam deret Taylor biasanya akan memberikan aproksimasi yang lebih baik. Jadi, polinomial kuadrat

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

akan memberikan aproksimasi yang lebih baik terhadap f . Polinomial Taylor orde n yang terletak di a adalah

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

2.2 Teori Kompleksitas

Notasi asimtotik digunakan untuk menguraikan asimtotik *running time* dari suatu algoritma yang didefinisikan dalam syarat-syarat dari suatu fungsi yang domainnya merupakan bilangan asli. Beberapa notasi tersebut cocok untuk menguraikan *running time* fungsi terburuk yang biasanya didefinisikan hanya pada ukuran bilangan bulat. Namun, untuk menggunakan notasi asimtotik tersebut dalam berbagai cara, misalnya notasi tersebut mudah diperluas untuk bilangan real atau pilihan lainnya dibatasi pada himpunan bagian bilangan asli.

Definisi 2.1

Misalkan *f* dan *g* adalah fungsi dengan domain {1, 2, 3, ...}.

$$f(n)=O(g(n))$$

dikatakan *f(n) berorde paling tinggi g(n)* jika terdapat sebuah konstanta positif C_1 sehingga

$$|f(n)| \leq C_1|g(n)|$$

untuk semua bilangan bulat terhingga *n*.

$$f(n)=\Omega(g(n))$$

di katakan *f(n) berorde paling kecil g(n)* jika tedapat konstanta positif C_2 sehingga

$$|f(n)| \geq C_2|g(n)|$$

Untuk semua bilangan bulat terhingga *n.*

$$f(n)=\Theta(g(n))$$

dikatakan *f(n) berorde sama dengan g(n)* jika *f(n)* = Ω*(g(n))*.

Definisi 2.1 dapat dinyatakan secara tak formal sebagai berikut: *f(n) = O(g(n))* jika, kecuali untuk konstanta dan sejumlah pengecualian tertentu, *f* dibatasatasi oleh *g. f(n)=*Ω*(g(n))* jika, kecuali untuk konstanta dan sejumlah pengecualian tertentu, *f* dibatasbawahi oleh *g. f(n)=Θ(g(n))* jika, kecuali untuk konstanta dan sejumlah pengecualian tertentu, *f* dibatasatasi dan dibatasbawahi oleh *g.* Ekspresi dari bentuk *f(n) = O(g(n))* dinyatakan sebagai **notasi Oh besar (Big Oh notation)**, di mana big Oh ini menyatakan asimtot.

Berdasarkan definisi tersebut, jika *f(n) = O(g(n))*, kecuali untuk konstanta dan sejumlah pengecualian tertentu, *f* dibatasi di atas oleh *g*, sehingga *g* tumbuh paling lambat sama dengan *f*. Sebagai contoh, jika *f(n) = n* dan *g(n)* = 2^n, maka *f(n) = O(g(n)),* tetapi jelas *g* tumbuh lebih cepat daripada *f*. Pernyataan *f(n) = O(g(n))* tidak menyinggung masalah batas *bawah* dari *f.*

Contoh : Misalkan $60n^2 + 5n + 1$ adalah sebuah fungsi $f(n)$. Fungsi tersebut dapat dituliskan sebagai $60n^2 + 5n + 1 \leq 60n^2 + 5n^2 + n^2 = 66n^2$ untuk $n \geq 1$. Menurut definisi 2.1 $C_1 = 66$ bisa diambil sebagai konstanta untuk memperoleh $60n^2 + 5n + 1 = O(n^2)$

2.3 Interpolasi Lagrange

Interpolasi adalah metode menghasilkan titik-titik data baru dalam suatu jangkauan dari suatu set diskret data-data yang diketahui Polinom interpolasi Lagrange dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

dengan

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

di mana $\prod$ menunjukkan perkalian, sehingga jika dituliskan dalam versi orde n :

$$f_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} f(x_1)$$

$$+ \cdots \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} f(x_n)$$

Contohnya untuk versi linear $(n = 1)$:

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Dan versi untuk orde 2 adalah :

$$f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

2.4 Kekonvergenan Fungsi

Definisi 2.2

Serangkaian fungsi $\sum f_n$ dikatakan deret pangkat sekitar x = c jika fungsi f_n memiliki bentuk

$$f_n(x) = a_n(x - c)^n$$

Di mana a_n dan c anggota bilangan riil dengan $n = 0,1,2, \ldots$

Notasi disederhanakan menjadi satu kasus, dimana $c = 0$. Translasi $x' = x - c$ memberikan barisan di sekitar c dengan barisan di sekitar 0. Dengan demikian, barisannya akan berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

2.5 Galat

Galat (error) numerik muncul dari penggunaan aproksimasi untuk mewakili operasi matematika eksak dan jumlah. Ini termasuk *galat pemotongan*, di mana hasil saat approksimasi digunakan untuk mewakili prosedur matematika eksak, dan *galat pembulatan*, di mana hasil saat angka memiliki angka penting terbatas yang digunakan untuk mewakili angka eksak. Untuk beberapa tipe, hubungan antara nilai eksak atau nilai sebenarnya, hasil dan aproksimasi dapat diformulasikan sebagai

Nilai sejati = aproksimasi + galat (2.1)

Berdasarkan persamaan 2.1 di atas, didapat bahwa nilai galat itu sama dengan ketidakcocokan antara nilai sebenarnya dengan nilai aproksimasi, yaitu

E_t = nilai sejati – nilai aproksimasi (2.2)

di mana E_t digunakan untuk menandakan nilai galat dari nilai eksak. Nilai *t* itu dimasukkan untuk menandakan bahwa itu adalah nilai galat sejati.

Kekurangan dari definisi ini adalah definisi tersebut tidak memperhitungkan urutan besarnya dari nilai di bawah pemeriksaan. Salah satu cara untuk menghitung besarnya jumlah yang ditaksir adalah untuk menormalisasi error dari nilai sebenarnya, yaitu

$$\text{Galat relatif} = \frac{\text{Galat sejati}}{\text{nilai sejati}}$$

di mana seperti pada yang telah ditentukan pada persamaan 2.2. Galat relatif dapat pula dikalikan dengan 100 persen yang ditunjukkan sebagai berikut

$$\varepsilon_t = \frac{\text{galat sejati}}{\text{nilai sejati}} 100\%$$

di mana ε_t adalah besarnya persen galat relatif.