BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Aljabar Linear

Definisi 2.1.1 Matriks

Matriks A adalah susunan persegi panjang yang terdiri dari skalar-skalar yang biasanya dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.2 Determinan Matriks

Setiap matriks bujur sangkar-n $A = [a_{mn}]$ ditetapkan memiliki skalar khusus yang disebut determinan dari A yang dinotasikan dengan det (A) atau $|A|$.

$$\text{Det (A)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

untuk matriks $A = [a_{mn}]$ 2x2 maka determinannya adalah

$$\text{Det (A)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Definisi 2.1.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x, jelasnya:

$$Ax = \lambda x$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matrik $A_{n\times n}$, maka $Ax = \lambda x$ dituliskan kembali sebagai

$$Ax = \lambda Ix$$

atau secara equivalen,

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Persamaan ini disebut persamaan karakteristik (*characteristic equation*) matriks *A*. Skalar- skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen *A*.

Teorema 2.1.4 *Pernyataan yang ekuivalen dengan matriks bujur sangkar*

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$*, I matriks identitas berukuran* $n \times n$*, dan* λ *adalah sebuah bilangan real, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.*

(i) λ *adalah sebuah nilai eigen dari A,*

(ii) Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ *memiliki solusi nontrivial,*

(iii)Terdapat sebuah vektor tak nol x pada R^n *sedemikian rupa sehingga* $Ax = \lambda x$.

(iv) λ *adalah sebuah solusi dari persamaan karakteristik det* $(\lambda I - A)$*=0*

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linear Orde Pertama

Secara Umum, sistem dari dua buah persamaan diferensial linear orde pertama dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(t, x, y) \qquad (2.1)$$

Sistem (2.1) dikatakan mempunyai solusi pada interval $I : \alpha < t < \beta$ jika terdapat himpunan *2* fungsi

$$x = x(t)\,, y = y(t) \qquad (2.2)$$

yang dapat didiferensialkan pada semua titik dalam interval I dan memenuhi sistem persamaan (2.1) pada semua titik pada interval ini.

Solusi ini dapat dipandang sebagai himpunan persamaan parametrik dalam ruang berdimensi 2. Untuk suatu nilai tertentu dari t, solusi ini akan memberikan nilai untuk koordinat-koordinat x, y dari sebuah titik-titik yang bersesuaian dengan $\alpha < t < \beta$ membentuk sebuah kurva dalam bidang. Kurva ini dinamakan trayektori atau lintasan dari sebuah partikel yang bergerak sesuai dengan sistem persamaan diferensial itu. Jika sistem ini dilengkapi dengan kondisi awal

$$x(t_0) = x^0, y(t_0) = y^0$$

dimana t_0 adalah nilai tertentu dari t dalam I, dan x^0, y^0 adalah nilai yang telah ditentukan maka membentuk masalah nilai awal. Kondisi-kondisi awal ini menentukan titik mulainya pergerakan partikel tersebut. Teorema eksistensi dan keunikan solusi masalah nilai awal ini analog dengan teorema eksistensi dan keunikan solusi untuk satu buah persamaan diferensial orde pertama.

Jika setiap fungsi F, Gadalah sebuah fungsi linear dari variabel tak bebas x, y maka sistem (2.1) disebut linear, jika tidak maka sistem (2.1) disebut non linear. Jika variabel t tidak tampak secara eksplisit dalam fungsi- fungsi F, G maka sistem itu disebut otonom, jika tidak maka sistem itu disebut tidak otonom. Jika variabel t menyatakan variabel waktu maka sistem otonom adalah bebas waktu dalam pengertian bahwa turunan-turunan yang berhubungan dengan pendefinisian sistem tidak berubah atas perubahan waktu. Oleh karena itu, bentuk umum sistem dari dua persamaan diferensial linear orde pertama dapat dituliskan sebagai :

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + b_1(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + b_2(t) \qquad (2.3)$$

Jika setiap $b_1(t), b_2(t)$adalah nol untuk semua t dalam interval I, maka sistem tersebut dinamakan homogen, jika tidak maka dinamakan sistem tak homogen. Dalam notasi matriks, sistem (3) dapat di tulis sebagai :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

atau $X' = A(t)\,X + B(t)$ (2.5)

2.3 Sistem Otonom

Sistem otonom dengan dua variabel mempunyai bentuk

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x,y) \tag{2.6}$$

dimana diasumsikan bahwa fungsi F dan G bersama-sama dengan turunan-turunan parsial pertama $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}$ merupakan fungsi kontinu atas daerah yang sesuai pada bidang $-xy$. Sistem (2.6) dikatakan otonom jika persamaan diferensialnya tidak mengandung peubah bebas secara explisit. Penyelesaian $x(t), y(t)$ dari sistem otonom (2.6) menyatakan suatu kurva C dalam bidang $-xy$.

Untuk sebuah sistem otonom (2.6), apabila t bertambah dan partikel bergerak dari sebuah titik (x,y) sepanjang sebuah trayektori keseluruh bidang fase maka arah dimana partikel bergerak bergantung hanya pada koordinat (x,y) dan tidak pada parameter waktu t. Pergerakan partikel hanya ditentukan oleh variabel posisinya bukan variabel waktu, oleh karena itu perilaku turunan-turunan $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$ bergantung hanya pada variabel posisi titik (x,y) dan tidak pada parameter bebas t. Dari sisni, dengan mengasumsikan bahwa $\frac{dx}{dt}$ tidak nol, maka kemiringan (gradien) suatu kurva C dititik $P(x,y)$, yaitu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)} \tag{2.7}$$

bernilai secara tunggal.

Jika (x,y) adalah titik dalam bidang fase untuk mana memenuhi $F(x,y)=0$ dan $G(x,y)=0$ secara simultan, maka $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$ keduanya nol. Jadi tidak ada gerakan baik dalam arah x maupun y, dan partikel itu stasioner. Titik yang demikian dinamakan titik kritis atau titik keseimbangan dari sistem (2.6). Catatan bahwa bilamana $P_0:(x_0,y_0)$ merupakan titik kritis dari sistem (2.6) maka persamaan $x=x_0$ dan $y=y_0$ memberikan sebuah solusi untuk system (2.6) itu.

Untuk pembahasan selanjutnya, dianggap bahwa $P_0:(x_0,y_0)$ merupakan titik kritis yang terasing yaitu $P_0:(x_0,y_0)$ adalah satu- satunya titik kritis dari sistem (2.6) di dalam lingkaran persekitaran di sekitar $P_0:(x_0,y_0)$. Sesungguhnya solusi keadaan mantap ini adalah hanya yang melewati titik $P_0:(x_0,y_0)$ dalam bidang fase. Trayektori yang dikaitkan dengan solusi ini secara sederhana adalah titik kritis $P_0:(x_0,y_0)$ sendiri. Jadi partikel adalah berhenti pada $P_0:(x_0,y_0)$.

Sebuah trayektori $x=x(t), y=y(t)$ dikatakan mendekati titik kritis $P_0:(x_0,y_0)$ jika $x(t)\to x_0$ dan $y(t)\to y_0$ ketika $t\to\infty$. Di dalam penerapan adalah sangat menarik untuk melihat apa yang terjadi pada sebuah trayektori ketika trayektori tersebut datang mendekati sebuah titik kritis. Konsep kestabilan merupakan fokus pembahasan tentang trayektori mendekati titik kritis. Titik kritis $P_0:(x_0,y_0)$ dikatakan stabil jika suatu trayektori memulai dekat dengan titik itu berhenti mendekatinya untuk semua waktu selanjutnya. Titik kritis $P_0:(x_0,y_0)$

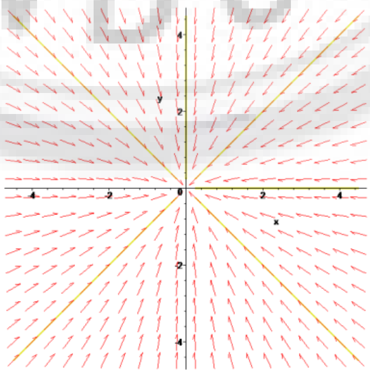
dikatakan stabil asimptotik (stabil dan atraktif) jika $P_0 : (x_0, y_0)$ stabil dan jika suatu trayektori yang memulai dekat ke titik $P_0 : (x_0, y_0)$ mendekati titik P_0 ketika t menuju mendekati ∞. Jika tidak stabil, titik kritis itu dinamakan tidak stabil.

Menurut bentuk umum geometris dari lintasan dan lingkungannya, kita mengenal beberapa jenis titik kritis yaitu titik simpul (sejati atau tak sejati), titik spiral. Suatu titik kritis terasing P_0 adalah

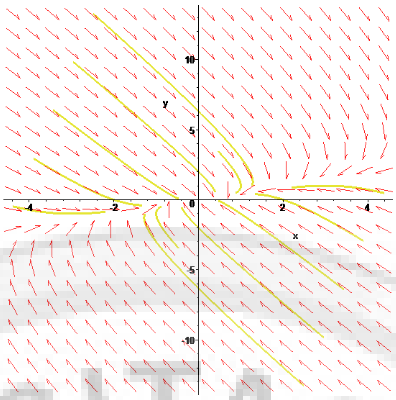
i. Titik simpul stabil sejati jika setiap lintasan mendekati P_0 menurut suatu arah tertentu bila $t \to +\infty$ atau $t \to -\infty$, dan untuk setiap arah yang diberikan ada suatu lintasan yang mendekati P_0 menuruti arah ini, dapat dilihat seperti gambar 2.1.

ii. Titik simpul stabil tak sejati jika setiap lintasan, kecuali mungkin sepasang lintasan, mempunyai limit arah yang sama di P_0, dapat dilihat sperti gambar 2.2.

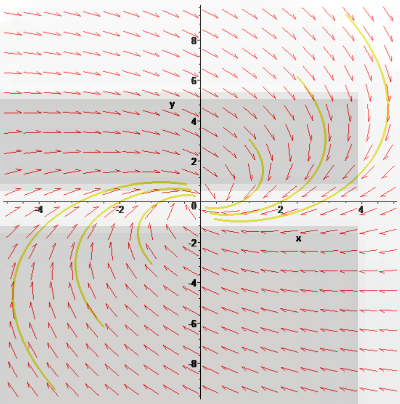
iii. Titik spiral, jika lintasan berbentuk lintasan disekitar P_0 dengan P_0 sebagai asimptot, dapat dilihat seperti gambar 2.3.



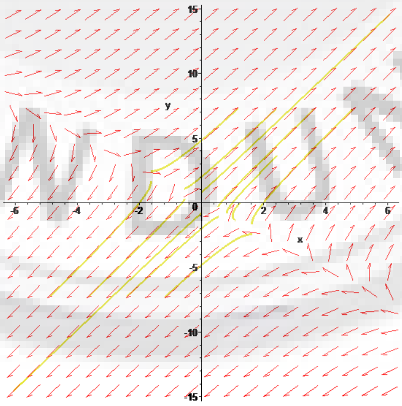
Gambar 2.1 Titik Simpul Stabil Sejati dan Atraktif



Gambar 2.2 Titik Simpul Stabil Tak Sejati dan Atraktif



Gambar 2.3 Titik Spiral



Gambar 2.4 Titik Tidak Stabil

2.4 Kestabilan Titik Kritis dari Sistem Otonomus

Persamaan otonomus yang ditulis dalam sistem (2.6) akan mempunyai $(((x)_0, (y)_0)$ sebagai titik kritis (atau kesetimbangan) dari sistem (2.6) apabila $F((x)_0, (y)_0) = 0$ dan $G((x)_0, (y)_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, akibatnya jika jika titik $((x)_0, (y)_0)$ merupakan titik kritis dari sistem ini, maka sepasang fungsi konstan

$$x(t) = (x)_0, \quad y(t) = (y)_0 \tag{2.8}$$

merupakan penyelesaian dari sistem (2.6) untuk semua nilai *t*.

Dalam Banyak keadaan, sangat penting mengetahui apakah setisp penyelesaian dari sistem (2.6) yang memulai cukup dekat dengan penyelesaian (2.8) pada *t* = 0 akan tetap dekat dengan (2.8) untuk seluruh *t* > 0 berikutnya. Jika demikian halnya, persamaan (2.8), atau titik kritis $(((x)_0, (y)_0)$ disebut stabil. Untuk lebih jelasnya diberikan definisi berikut.

Definisi 2.4.1 *Titik kritis* $((\mathrm{x})_0, (\mathrm{y})_0)$ *atau penyelesaian konstan* (2.8) *dari sistem* (2.6) *disebut stabil jika untuk setiap bilangan* ε > 0 *terdapat suatu bilangan* δ > 0 *sedemikian hingga setiap penyelesaian* $(x(t), y(t))$ *yang pada t = 0 memenuhi*

$$[x(0) - (x)_0]^2 + [y(0) - (y)_0]^2 < \delta \tag{2.9}$$

terwujud dan memenuhi

$$[x(t) - (x)_0]^2 + [y(t) - (y)_0]^2 < \varepsilon \tag{2.10}$$

untuk semua t ≥ 0.

Definisi 2.4.2 *Titik kritis* $((x)_0, (y)_0)$ *atau penyelesaian konstan* (2.8) *dari sistem* (2.6) *disebut stabil asimtotik jika titik itu stabil dan sebagai tambahan terdapat* $\delta_0 > 0$ *sedemikian hingga setiap penyelesaian* $(x(t), y(t))$ *yang pada t = 0 memenuhi*

$$[x(0) - (x)_0]^2 + [y(0) - (y)_0]^2 < \delta_0 \tag{2.11}$$

terwujud dan memenuhi

$$lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \quad lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \tag{2.12}$$

Secara singkat dikatakan, stabilitas berarti perubahan kecil dalam syarat awal hanya menyebabkan pengaruh kecil pada penyelesian, stabil asimtotik berarti pengaruh dari perubahan kecil cenderung menghilang sama sekali (tidak berpengaruh) sedangkan ketakstabilan berarti suatu perubahan kecil pada syarat awalnya akan berakibat perubahan besar pada penyelesaian.

Selanjutnya sifat-sifat kestabilan secara umum dari sistem otonomus linear

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} x$$

dapat dianalisa dari nilai eigen matrik. Jika $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ dan (0,0) adalah titik kritis sistem persamaan ini dan solusinya berbentuk $x_1(t) = Ae^{\lambda t}, x_2(t) = Be^{\lambda t}$, dengan λ adalah nilai eigen real dari sistem otonom linear dengan sifat-sifat kestabilan dapat dilihat dalam teorema 2.4.3 di bawah ini,

Teorema 2.4.3 *Titik kritis* (0,0) *dari sistem PDB Otonom*

- *Akan stabil jika dan hanya jika kedua nilai eigennya real dan negatif atau mempunyai bagian real yang takpositif.*
- *Akan stabil asimtotik jika dan hanya jika kedua nilai eigennya real dan negatif atau mempunyai bagian real yang negatif.*
- *Akan takstabil jika dan hanya jika salah satu atau kedua nilai eigennya real dan positif atau paling sedikit satu nilai eigen mempunyai bagian real yang positif.*

Bukti :

Misalkan solusi sistem persamaan diferensial otonom linier adalah

$$x_1(t) = Ae^{\lambda t}, x_2(t) = Be^{\lambda t}$$

dengan λ adalah nilai eigen real dari sistem otonom linear, dimana A, B adalah konstanta sebarang dengan $A \neq 0$, $B \neq 0$, dan $t \geq 0$.

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih $\delta = \varepsilon$, sedemikian sehingga $A^2 + B^2 < \delta$. Karena titik kritis (0,0) maka $(x_1)_0 = 0$, $(x_2)_0 = 0$ dengan $x_1(0) = A$ dan $x_2(0) = B$, sehingga berlaku

$$[x_1(t) - (x_1)_0]^2 + [x_2(t) - (x_2)_0]^2$$
$$= (Ae^{\lambda t} - 0)^2 + (Be^{\lambda t} - 0)^2$$
$$= (Ae^{\lambda t})^2 + (Be^{\lambda t})^2$$
$$= (A^2 + B^2)e^{2\lambda t} < \delta e^{2\lambda t}$$

Perhatikan bahwa jika $\lambda < 0$, maka

$$\delta e^{2\lambda t} < \delta = \varepsilon$$

dan jika $\lambda = 0$, maka

$$\delta e^{2\lambda t} = \delta = \varepsilon$$

Jadi persamaan (2.10) terpenuhi.

Selanjutnya perhatikan juga bahwa untuk $\lambda < 0$, maka

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} Ae^{\lambda t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} x_2(t) = \lim_{t\to\infty} Be^{\lambda t} = 0$$

maka persamaan (2.12) terpenuhi, sedangkan untuk $\lambda = 0$,

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} Ae^{\lambda t} = A, \quad \lim_{t\to\infty} x_2(t) = \lim_{t\to\infty} Be^{\lambda t} = B$$

yang berarti bahwa untuk bilangan eigen real negatif sistem otonom linear akan stabil asimtotik.

Sedangkan untuk $\lambda > 0$, maka

$$\delta > (A^2 + B^2)e^{2\lambda t} > A^2 + B^2$$

yang kontradiksi dengan $A^2 + B^2 < \delta$, ini berarti persamaan (2.9) tidak dipenuhi. Sehingga dapat dikatakan sistem tak stabil. Terbukti.

2.5 Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial linear dengan Matriks

Misal untuk sistem persamaan diferensial linier homogen 2x2 dengan koefisien konstanta berikut:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y$$

$$\frac{dx}{dt} = a_2x + b_2y \tag{2.13}$$

Dimana konstanta a_1, a_2, b_1, b_2 diasumsikan bilangan riil. Sistem (2.13) dapat disajikan dalam bentuk matriks adalah

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

dimana $x' = \frac{dx}{dt}$ dan $y' = \frac{dy}{dt}$.

Sistem (2.14) secara ringkas dapat ditulis dengan memperkenalkan vektor-vektor X', X dan matriks A, yaitu:

$$X' = AX \tag{2.15}$$

Setiap sistem linier homogen dengan koefisien konstanta mempunyai sebuah himpunan solusi fundamental. Himpunan fundamental ini adalah himpunan solusi yang bebas linier. Solusi umum untuk sistem linier homogen 2x2 dengan koefisien konstanta dinyatakan oleh

$$X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) \tag{2.16}$$

dimana C_1 dan C_2 adalah konstanta sembarang, $X_1(t)$ dan $X_2(t)$ adalah dua solusi yang bebas linier. Jadi $\{X_1(t), X_2(t)\}$ adalah himpunan solusi fundamental untuk suatu sistem jika dan hanya jika merupakan himpunan yang bebas linear.

Dari bentuk sistem linier (2.16), dapat diasumsikan sebagai solusi berbentuk

$$X = Ke^{\lambda t} \text{atau} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Dalam hal ini hanya difokuskan pada solusi tak trivial karena akan mencoba mendapatkan himpunan fundamental. Jadi himpunan itu tidak dapat memuat vektor nol (karena vektor nol adalah vektor tak bebas linier), k_1 dan k_2 keduanya tak nol. Agar dapat menentukan konstanta tak diketahui λ, k_1, dan k_2, maka solusi (2.17) harus memenuhi sistemnya. Dengan mendiferensialkan dan melakukan substitusi pada setiap komponen vektor itu, kita memperoleh

$$\lambda k_1 e^{\lambda t} = a_1 k_1 e^{\lambda t} + b_1 k_2 e^{\lambda t}$$

$$\lambda k_2 e^{\lambda t} = a_2 k_1 e^{\lambda t} + b_2 k_2 e^{\lambda t} \quad (2.18)$$

atau

$$(a_1 - \lambda) k_1 + b_1 k_2 = 0$$

$$a_2 k_1 + (b_2 - \lambda) k_2 = 0 \quad (2.19)$$

atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Sistem (2.19) merupakan sistem persamaan linier homogen dan agar mendapatkan solusi tak trivial maka haruslah

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.21)$$

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \quad (2.22)$$

Persamaan (2.22) dinamakan persamaan karakteristik dari sistem itu. Akar-akar dari persamaan karakteristik ini dinamakan nilai karakteristik dan dapat berbentuk bilangan riil berbeda, bilangan riil kembar serta bilangan kompleks.

Selanjutnya akan diselidiki jenis titik kritis secara analitik yaitu bagaimana menentukan jenis suatu titik kritis terasing P_0 dari suatu sistem otonom (2.6). Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan P_0 adalah titik (0,0). Cara yang sering dipakai untuk menyelidiki jenis titik kritis ini adalah dengan cara pelinieran.

Karena $P_0: (0,0)$ adalah titik kritis maka $F(0,0) = 0$ dan $G(0,0) = 0$, akibatnya F dan G tidak mempunyai konstanta. Dari sini dapat dituliskan suku liniernya secara eksplisit

$$x' = a_1 x + b_1 y + F_1(x, y)$$

$$y' = a_2 x + b_2 y + G_1(x, y) \quad (2.23)$$

sistem linier yang dihasilkan dengan pelinieran sistem (2.23) ini yaitu dengan menghilangkan F_1 dan G_1, sehingga diperoleh

$$x' = a_1 x + b_1 y$$

$$y' = a_2 x + b_2 y \quad (2.24)$$

dari sistem (2.14) jika $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ maka jenis dan kestabilan P_0 sama dengan jenis dan kestabilan titik kritis (0,0) dari sistem linier.

Persamaan (2.22) dapat ditulis dalam notasi yang baku dengan memisalkan

$$u = a_1 + b_2 \,, v = a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{2.25}$$

Dari (2.25), persamaan karakteristik (2.22) dapat ditulis juga sebagai persamaan

$$\lambda^2 - u\lambda + v = 0 \tag{2.26}$$

Jika λ_1, λ_2 adalah akar-akar karakteristik maka diperoleh

$$\lambda^2 - u\lambda + v = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0 \tag{2.27}$$

sehingga

$$u = \lambda_1 + \lambda_2, v = \lambda_1\lambda_2 \tag{2.28}$$

Berdasarkan u dan v ini dapat dicirikan P_0 sebagai berikut:

a) Stabil dan atraktif jika $u < 0$ dan $v > 0$

b) Stabil jika $u \leq 0$ dan $v > 0$

c) Tidak stabil jika $u > 0$ atau $v < 0$

2.6 Permintaan dan Penawaran

Permintaan adalah sejumlah barang yang dibeli atau diminta pada suatu harga dan waktu tertentu. Sedangkan pengertian penawaran adalah sejumlah barang yang dijual atau ditawarkan pada suatu harga dan waktu tertentu.

2.6.1 Hukum Permintaan dan Kurva Permintaan

"Apabila harga barang naik maka jumlah yang diminta akan turun, sebaliknya apabila harga turun makan jumlah yang diminta akan naik".

Kasus pengecualian dari hukum permintaan :

1. Barang yang memiliki unsur spekulasi, misalnya: emas, saham, tanah.
2. Barang *prestise* dan *luxury*, misalnya : mobil mewah, benda seni tinggi, benda kuno, dll.
3. Barang *Giffen* (harga turun permintaan turun)

Hukum permintaan ini dapat di gambarkan dalam suatu kurva dimana sumbu X-nya menyatakan kuantitas (Q=*quantity*) dan sumbu Y-nya menyatakan Harga (P=*price*) sehingga membentuk *slope negative* atau menurun sebagai berikut

Gambar 2.5 : Kurva Permintaan

2.6.2 Fungsi Permintaan

Fungsi permintaan (*demand function*) adalah adalah persamaan yang menunjukan jumlah permintaan suatu barang dengan faktor- faktor yang mempengaruhinya. Hubungan jumlah permintaan barang dengan hartga barang itu sendiri dapat ditulis

$$Q_d = f(P_q) \quad (2.29)$$

dimana : Q_d=Jumlah barang yang diminta

P_q= harga barang itu sendiri

Fungsi permintaan secara spesifik dapat ditulis

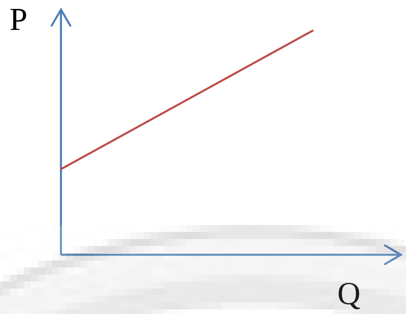
$$Q_d = a - bP_q \quad (2.30)$$

dimana a adalah konstanta dan b adalah koefisien yang menunjukan perubahan jumlah barang yang diminta yang disebabkan oleh satu satuan harga barang tersebut.

2.6.3 Hukum Penawaran dan Kurva Penawaran

“ Apabila harga barang naik maka jumlah yang ditawarkan akan naik, sebaliknya apabila harga turun maka jumlah yang ditawarkan akan turun”. Kasus pengecualian hukum penawaran sama dengan kasusu pengecualian untuk permintaan.

Hukum penawaran ini dapat di gambarkan dalam suatu kurva dimana sumbu X-nya menyatakan kuantitas (Q=*quantity*) dan sumbu Y-nya menyatakan Harga (P=*price*) sehingga membentuk slope positif atau menaik sebagai berikut



Gambar 2.6: Kurva Penawaran

2.6.4 Fungsi Penawaran

Fungsi penawaran (*supply function*) adalah adalah persamaan yang menunjukan jumlah penawaran suatu barang dengan faktor- faktor yang mempengaruhinya. Hubungan jumlah penawaran barang dengan hartga barang itu sendiri dapat ditulis

$$Q_s = f(P_q) \tag{2.31}$$

dimana : Q_s=Jumlah barang yang ditawarkan

P_q= harga barang itu sendiri

Fungsi penawaran secara spesifik dapat ditulis

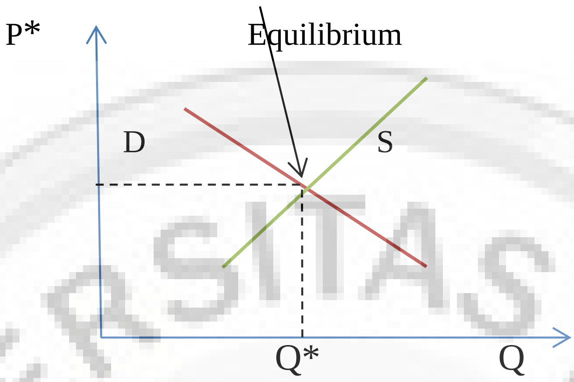
$$Q_d = a + bP_q \tag{2.32}$$

dimana a adalah konstanta dan b adalah koefisien yang menunjukan perubahan.

2.5.5 Keseimbangan Pasar (*equilibrium*)

Keseimbangan pasar terjadi atas kondisi dimana pada suatu tingkat harga tertentu jumlah permintaan dan jumlah penawaran mempunyai jumlah yang sama.

Keadaan ini dinamakan keadaan seimbang atau dikenal dengan istilah *equilibrium*. Keadaan ini dapat kita lihat pada grafik berikut :



Gambar 2.7 : Titik *Equilibrium*

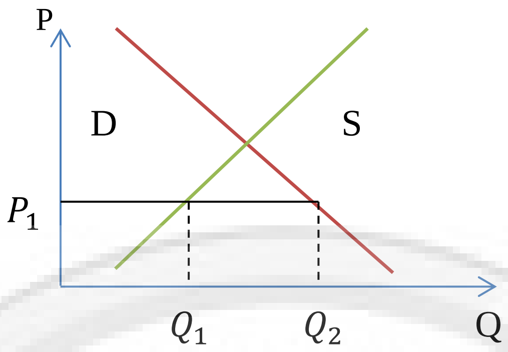
Dari grafik gambar 2.7 dapat dilihat bahwa pada suatu tingkat harga P* jumlah permintaan dan jumlah Penawaran mempunyai jumlah yang sama (Q*) sehingga pada koordinat (Q*,P*) sumbu S yang merupakan fungsi penawaran dan sumbu D yang merupakan fungsi permintaan saling berpotongan, yang mana pada titik ini dinamakan titik keseimbangan (*equilibrium point*).

2.6.6 *Disequilibrium*

Dalam ekonomi juga dikenal istilah *disequilibrium*, yang dimaksud dengan *disequilibrium* adalah keadaan dimana kondisi harga tidak ketemu pada titik equilibrium yaitu pada titik P* dan Q*. Ada beberapa jenis kondisi disequilibrium, yaitu:

a. Kelebihan Permintaan (*Excess Demand*)

Keadaan kelebihan permintaan dapat dilihat dari grafik sebagai berikut :

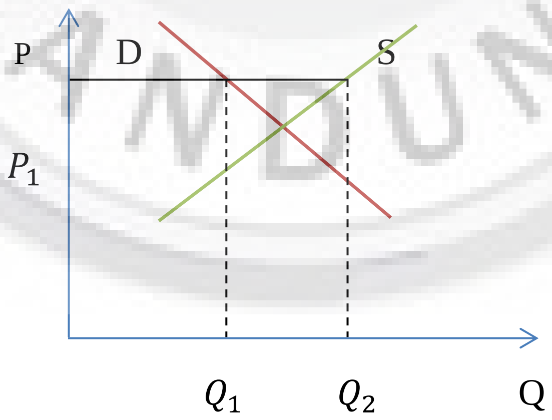


Gambar 2.8 : Grafik *Excess Demand*

Dari grafik gambar 2.8 dapat dilihat bahwa yang dimaksud dengan kelebihan permintaan adalah suatu kondisi dimana dengan penetapan harga seharga P_1 mengakibatkan jumlah permintaan (Q_2) lebih besar dari pada jumlah penawaran (Q_1) sehingga terjadi pengalokasian sumber ekonomi yang tidak optimum karena jumlah yang sebenarnya diminta pasar lebih besar dari yang ditawarkan.

b. Kelebihan Penawaran (*Excess Supply*)

Keadaan kelebihan penawaran dapat dilihat dari grafik sebagai berikut :



Gambar 2.5 : Grafik *Excess Supply*

Dari grafik di atas dapat dilihat bahwa yang dimaksud dengan kelebihan penawaran adalah suatu kondisi dimana penetapan suatu harga (P_1) mengakibatkan jumlah penawaran (Q_2) menjadi lebih besar dari jumlah permintaan yang sebenarnya (Q_1).