FORMULA HERON

Oleh :

Farid H Badruzzaman, Drs

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Islam Bandung
2008

Lembar Pengesahan

FORMULA HERON

Telah didokumentasikan
Di Perpustakaan UNISBA,

Arief Dj. Tresnawan, Drs.

Kata Pengantar

Bismillahirrahmaanirrahiem

Puji dan syukur kita panjatkan ke hadirat Allah SWT, yang telah menganugerahkan akal dan hati kepada manusia sehingga dapat menjalankan tugas kekhalipahan di muka Bumi ini.

Sebagai seorang pengajar di Perguruan Tinggi, dan dalam rangka meningkatkan kualitas dengan mengikuti aturan dan ketentuan yang berlaku dalam sistem pendidikan tinggi di Indonesia, salah satunya adalah kenaikan fungsional dosen yang dipenuhi dalam unsur Tri Dharma Perguruan Tinggi.

Makalah ini dibuat dalam rangka memenuhi persyaratan aspek pelaksanaan penelitian ilmiah. Adapun bahasan dalam makalah ini disusun berdasarkan dan disesuaikan dengan latar belakang penulis miliki, yaitu matematika..

Tentu saja apa yang penulis sampaikan melalui makalah ini belum merasa puas. Saran keritik dari siapapun akan menjadi bekal penulis pada makalah-makalah selanjutnya.

Ucapan terimakasih, penulis sampaikan kepada Pimpinan Universitas Islam Bandung yang telah memberikan kesempatan ini kepada penulis.

Bandung, 2008

FORMULA HERON

Farid H Badruzzaman

Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNISBA
Jalan Tamansari 1 Bandung 40116
Tlp. (022)4203368 E-mail faridhbadruzzaman@yahoo.com

Abstrak

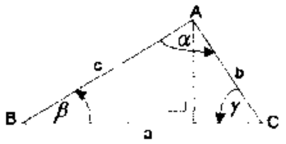
Pada makalah ini akan dibahas bagaimana mencari luas sebuah segitiga jika yang diketahui adalah panjang dari ketiga sisinya. Formula untuk mencari luasnya dihitung dengan menggunakan dalil Heron

Kata-kata kunci : Heron, Pythagoras

Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai bentuk-bentuk bidang yang berbentuk segitiga. Jika bidang yang berbentuk segitiga itu akan dicari luasnya, formula yang sering dipakai adalah $L = \dfrac{panjang\ alas \times tinggi}{2}$. Jika variabel tinggi tidak diketahui dan yang diketahuinya adalah panjang dua buah sisi serta suadut antara kedua sisinya, maka formula yang sering kita gunakan adalah formula $L = \frac{1}{2}(a)(b)\sin\alpha$ dimana a dan b adalah panjang kedua buah sisinya dan α adalah besarnya sudut antara a dan b. Tetapi jika yang diketahuinya hanyalah sisi-sisinya, maka formula yang bisa digunakan adalah formula Heron. Pada makalah ini akan dibahas bagaimana formula Heron itu diturunkan serta penggunaannya.

Dalil Sinus

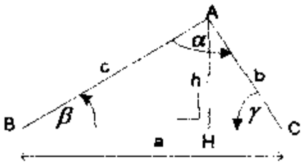


Gambar 1

Dari segitiga ABC pada gambar 1 di atas, dapat ditentukan dalil berikut :

Dalil Sinus $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Bukti :



Gambar 2

$\sin\beta = \dfrac{h}{c}$ atau $h = c\sin\beta$ (1)

$\sin\gamma = \dfrac{h}{b}$ atau $h = b\sin\gamma$ (2)

Dari (1) dan (2), maka

$c\sin\beta = b\sin\gamma$

Dengan membagi kedua ruasnya dengan $\sin\beta\sin\gamma$ maka diperoleh

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{b}{\sin\beta}$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

Sehingga dalam sebuah segitiga sembarang dengan sudut $\alpha;\beta;\gamma$ serta panjang sisi-sisinya dihadapan sudut tersebut a , b , dan c berlaku

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

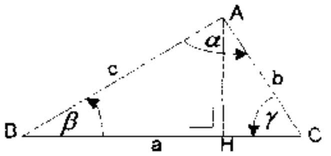
Dalil Cosinus

$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos\alpha$

$b^2=a^2+c^2-2ac\ \cos\beta$

$c^2=a^2+b^2-2bc\ \cos\gamma$

Bukti :



Gambar 3

a = BH + HC = BC

HC = b cos γ

BH - HC = (BH + HC) - 2HC = a -2b cos γ

Perhatikan Δ ABH dan Δ AHC, maka

$c^2=(BH)^2+(AH)^2$

$b^2=(HC)^2+(AH)^2$

$c^2-b^2=(BH)^2+(AH)^2-(HC)^2-(AH)^2$

$c^2-b^2=(BH)^2-(HC)^2=(BH-HC)(BH+HC)=(a-2b\ \cos\gamma)(a)$

$c^2-b^2=(a-2b\ \cos\gamma)(a)=a^2-2ab\ \cos\gamma$

$c^2-b^2=a^2-2ab\cos\gamma$ sehingga diperoleh

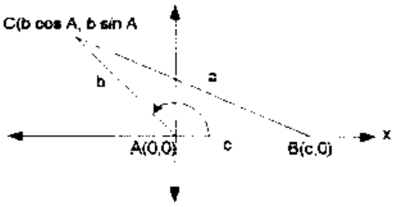
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$

Cara lain



Gambar 4

Gunakan formula jarak dua titik. Jarak antara titik B dan C adalah

$a^2=(b\cos A-c)^2+(b\sin A-0)^2$

$a^2=b^2\cos^2 A-2bc\cos A+c^2+b^2\sin^2 A$

$a^2 = b^2\cos^2 A + b^2 \sin^2 A - 2bc\cos A + c^2$

$a^2 = b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc\cos A + c^2$

$a^2 = b^2 - 2bc\cos A + c^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

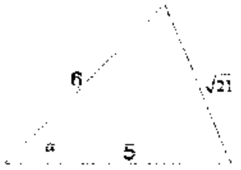
Jika $\angle C = 90^o$, maka dalil cosinus menjadi dalil Pythagoras. Jadi, dalil Pythagoras merupakan hal khusus dari dalil cosinus

Contoh 1

Tentukan nilai sinus sudut terkecil dari segitiga yang sisinya 5 cm, 6 cm dan $\sqrt{21}$ cm

Jawab :

Misal segitiga yang dimaksud adalah



Gambar 5

Dalam sebuah segitiga sembarang, berlaku dalil cosinus

$\left(\sqrt{21}\right)^2 = 5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos\alpha$

$21 = 25 + 36 - 60\cos\alpha$

$21 = 61 - 60\cos\alpha$

$60\cos\alpha = 40$, maka $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \frac{4}{9} = 1$, maka $\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$

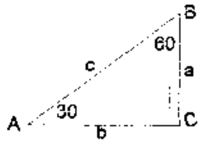
Jadi, harga sinus sudut terkecil dari segitiga di atas adalah $\frac{1}{3}\sqrt{5}$

Contoh 2

Diketahui segitiga ABC. Panjang sisi AC=b cm, sisi BC = a cm dan a + b = 10 cm. Jika $\angle A = 30^o$ dan $\angle B = 60^o$, tentukan panjang sisi AB = ...

Jawab :

Diketahui $\angle A = 30^o$; $\angle B = 60^o$; maka $\angle C = 90^o$



Gambar 6

$a = c\ \sin 30^0 = \frac{1}{2}c$

$b = c\ \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}c$

Diketahui bahwa

$c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ (karena segitinya adalah siku-siku)

$c^2 = (10)^2 - 2.\frac{1}{2}c.\frac{1}{2}\sqrt{3}c$

$c^2 = 100 - \frac{1}{2}\sqrt{3}c^2$

$c^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}c^2 = 100$

$c^2\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 100$, maka $c^2 = \dfrac{100}{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}$

$$c^2 = \frac{100}{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{100\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}{1-\frac{3}{4}}$$

$$= 400\left(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 100\left(4-2\sqrt{3}\right)$$

$c^2 = 100\left(1-2\sqrt{3}+3\right) = 10^2\left(1-\sqrt{3}\right)^2$

$c = 10\left(1-\sqrt{3}\right) = \pm\left(10-10\sqrt{3}\right)$

Harga c diambil yang berharga positif, maka

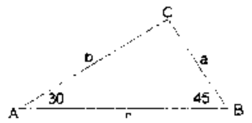
$c = -\left(10-10\sqrt{3}\right) = \left(10\sqrt{3}-10\right)$

Jadi, panjang AB adalah $\left(10\sqrt{3}-10\right)cm$

Contoh 3

Pada Δ ABC, diketahui a + b = 10, sudut A = 30° dan sudut B = 45°, tentukan panjang sisi b = ...

Jawab :



Gambar 7

α : sudut A

β : sudut B

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \rightarrow a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$a = b\frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = b\,\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{b}{2}\sqrt{2}$$

Diketahui a + b = 10, maka :

$\frac{b}{2}\sqrt{2} + b = 10$, kedua ruas kalikan dengan 2, maka diperoleh

$b\sqrt{2} + 2b = 20$

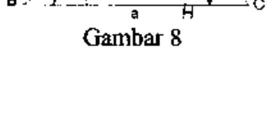
$b\left(\sqrt{2}+2\right) = 20$

$b = \dfrac{20}{2+\sqrt{2}}$ atau

$$b = \frac{20}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{20(2-\sqrt{2})}{2} = 10(2-\sqrt{2})$$

Aplikasi Dalil Sinus dan Cosinus
Luas Segitiga ABC



Gambar 8

Luas segitiga ABC adalah $L = \frac{1}{2}(alas \times tinggi) = \frac{1}{2}(a \times AH)$

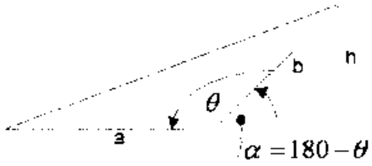
Tetapi $\sin\beta = \frac{AH}{c}$, maka $AH = c\sin\beta$

$L = \frac{1}{2}(a \times c\sin\beta) = \frac{1}{2}ac\sin\beta$

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa

$L = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$

Cara lain



Gambar 9

$\sin\alpha = \frac{h}{b} \rightarrow h = b\sin\alpha$

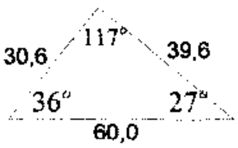
Tetapi $\sin\alpha = \sin(180-\theta) = \sin\theta$, maka $h = b\sin\theta$

Luas segitiga $L = \frac{1}{2}(alas)(tinggi)$

$L = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\theta$

Contoh 1

Tentukan luas segitiga pada gambar di bawah ini



Gambar 10

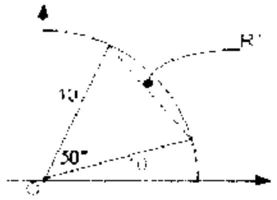
Jawab :

Misal a = 30,6 cm; b = 60,0cm ; $\alpha = 36^o$

$L = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}(30,6)(60,0)\sin 36^o \approx 540$ satuan luas

Contoh 2

Tentukan luas R_1 pada gambar di bawah ini



Gambar 11

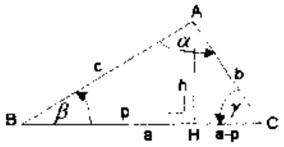
Jawab :

Luas daerah $R_1 = \frac{1}{2}(r)^2.(\theta) - \frac{1}{2}(a \cdot b).\sin(\theta)$

$$R_1 = \tfrac{1}{2}(10)^2.\left(\frac{5\pi}{18}\right) - \tfrac{1}{2}(10\cdot 10).\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}(10)^2.\left(\frac{5\pi}{18}\right) - \tfrac{1}{2}(10)^2.\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right) = 5{,}33 \text{ satuan luas}$$

Dalil Heron

Perhatikan segitiga berikut



Gambar 12

Dengan menggunakan dalil Pythagoras dapat dinyatakan bahwa

$$h^2 = c^2 - p^2$$
$$h^2 = b^2 - (a-p)^2$$

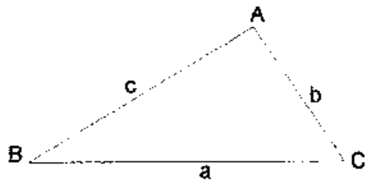
sehingga :

$$c^2 - p^2 = b^2 - (a-p)^2$$
$$c^2 - p^2 = b^2 - a^2 + 2ap - p^2$$
$$c^2 = b^2 - a^2 + 2ap$$
$$p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$
$$h^2 = c^2 - p^2 = (c-p)(c+p)$$
$$h^2 = (c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a})(c + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a})$$
$$h^2 = \left(\frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)$$
$$h^2 = \left(\frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}\right)\left(\frac{(a+c)^2 - b^2}{2a}\right)$$
$$h^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)}{4a^2}$$
$$h^2 = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}{4a^2}$$
$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{4a^2}$$
$$h^2 = \frac{2s(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)}{4a^2} \qquad \text{dimana } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$
$$h^2 = \frac{16s(s-a)(s-c)(s-b)}{4a^2}$$
$$h^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$
$$h = \sqrt{\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}}$$
$$h = 2\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

Maka luas segitiga dapat dinyatakan dalam bentuk

$$L=\frac{1}{2}ah=a\frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}=\sqrt{s(s-a)(s-b)s-c)}$$

Cara lain



Gambar 13

Kita mulai dengan formula bahwa luas segitiga di atas adalah $L=\frac{1}{2}ab\sin C$

$$L=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$(L)^2=\frac{1}{4}a^2b^2\sin^2 C$$

$$(L)^2=\frac{1}{2}a^2b^2(1-\cos^2 C)$$

$$(L)^2=\frac{1}{2}a^2b^2(1-\cos C)(1+\cos C)$$

Dari dalil cosinus kita mempunyai bahwa

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$1+\cos C=1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad \textit{(kedua ruas ditambah 1)}$$

$$1+\cos C=\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$1+\cos C=\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}$$

$$1+\cos C=\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$1-\cos C=1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$1-\cos C=\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}$$

$$1-\cos C=\frac{c^2+2ab-a^2-b^2}{2ab}$$

$$1-\cos C=\frac{c^2-(a^2+b^2-2ab)}{2ab}$$

$$1-\cos C=\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}$$

$$1-\cos C=\frac{[c-(a-b)][c+(a-b)]}{2ab}$$

$$1-\cos C=\frac{[c-a+b][c+a-b]}{2ab} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Substitusikan (1) dan (2) terhadap $(L)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos C)(1+\cos C)$, maka

$$(L)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\,\frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab}\,\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab}$$

$$(L)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\,\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}\,\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab}$$

$$(L)^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(2)(2)}\,\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(2)(2)}$$

$$(L)^2 = \frac{(a+b+c)}{2}\,\frac{(a+b-c)}{2}\,\frac{(c+a-b)}{2}\,\frac{(c-a+b)}{2}$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$(s-c) = \frac{1}{2}(a+b-c)$$

$$(s-b) = \frac{1}{2}(c+a-b)$$

$$(s-a) = \frac{1}{2}(c-a+b)$$

Maka

$$(L)^2 = s(s-c)(s-b)(s-a)$$

$$L = \sqrt{s(s-c)(s-b)(s-a)}\ \textit{terbukti}$$

Contoh

Tentukan luas segitiga yang sisi-sisinya a=20; b=15 dan c=17

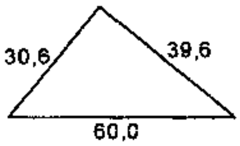
Jawab :

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+15+17}{2} = 26$$

$$L = \sqrt{26(26-20)(20-15)(20-17)} \approx 124,2739$$

Contoh 2

Tentukan luas segitiga pada gambar di bawah ini



Gambar 14

Jawab :

Misal a = 30,6 cm; b = 60,0cm ; c = 39,6 cm

$$L = \sqrt{s(s-c)(s-b)(s-a)}$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(30,6+60+39,6) = 65,1$$

$$L = \sqrt{65,1(65,1-30,6)(65,1-60)(65,1-39,6)}$$

$$L = \sqrt{65,1(34,5)(5,1)(25,5)}$$

$$L = \sqrt{292085,7975} \approx 540 \text{ satuan luas}$$

Kesimpulan

Formula yang sering dipakai dalam mencari luas segitiga adalah antara lain :

a) $L = \dfrac{\textit{panjang alas} \times \textit{tinggi}}{2}$

b) $L = \frac{1}{2}(a)(b)\sin\alpha$ dimana a dan b adalah panjang kedua buah sisinya dan α adalah besarnya sudut antara a dan b

c) $L = \frac{1}{2}ah = a\frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{a} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ dimana $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Daftar Pustaka

1. Raymond A. Barnett, Michael R. Ziegler, Karl E Byleen, "*Colege algebra with trigonometry*" 7th ed, McGraw-Hill Higher Education Companies, Inc., 1221 Avenue of the Americas New York, 2001
2. Todd Swanson, Janet Anderson, Robert Keeley. *Precalculus*, Harcourt Brace & Company, 1999
3. KRS Sastry, *Heron Triangles* : A Gergone Cevian and Median Perspective, Forum Geometricorum Volume 1 (2001) 17-24
4. Paul Yiu, *Euclidean Geometry*, Department of Mathematics Florida Atlantic University, 1998