

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Teori Antrian

Antrian didefinisikan sebagai suatu keadaan umum yang senantiasa ada di keseharian di mana individu menanti giliran untuk memperoleh pelayanan atau sarana layanan. Keadaan dari antrian dapat dicontohkan seperti pelanggan yang menanti giliran untuk memperoleh layanan *service* motor di bengkel, mahasiswa yang sedang menunggu untuk pembayaran UKT dan SKS di Unisba, dan mahasiswa yang menanti giliran dipanggil dalam pelaksanaan kegiatan perwalian pada program studi teknik industri. Heizer dan Render (2009, h. 658) mengartikan antrian sebagai deretan orang atau barang yang menanti giliran untuk dilayani atau cara perusahaan mengefisienkan waktu dan fasilitas dalam memberikan pelayanan terbaik kepada pelanggannya.

Pada tahun 1910, seorang insinyur berkewarganegaraan Denmark yang bernama A. K. Erlang berhasil menemukan dan mengembangkan teori antrian pertama kali. Sebagai seorang karyawan dari perusahaan telepon di Kopenhagen, Erlang bereksperimen mengenai naik-turunnya permohonan fasilitas telepon yang berkaitan dengan peralatan sambungan telepon otomatis.

Teori antrian sesungguhnya bertujuan untuk melakukan penelitian terhadap aktivitas dari sarana pelayanan dalam rangkaian keadaan acak dari suatu sistem antrian yang ada, oleh karena itu pengukuran logis akan didasarkan pada dua hal yaitu berapa waktu yang dihabiskan oleh para pelanggan untuk menanti giliran yang dapat dinyatakan sebagai rata-rata waktu yang diperlukan oleh seorang pelanggan untuk menanti giliran sampai memperoleh pelayanan dan berapa persentase dari waktu yang disediakan untuk memberikan sarana pelayanan berada dalam kondisi menganggur.

Teori antrian sangat diperlukan dalam operasi dan bidang usaha. Hal ini dikarenakan teori antrian dapat membantu dalam mengatasi permasalahan dunia usaha yang senantiasa terkait dengan kedatangan dan kemacetan. Teori antrian memiliki tujuan utama untuk menciptakan keseimbangan antara biaya pelayanan dengan biaya yang diakibatkan dari *waiting time*.

2.2 Komponen Pokok Teori Antrian

Kedatangan, disiplin pelayanan, dan desain pelayanan merupakan unsur-unsur yang dibutuhkan pada teori antrian. Adapun penjelasan ketiga unsur tersebut dapat dilihat di subbab 2.2.1 sampai 2.2.3.

2.2.1 Kedatangan

Dalam hal antrian, senantiasa berkaitan dengan tingkat kehadiran atau biasa disebut juga dengan populasi. Populasi yang dimaksud di sini merupakan sumber dari entitas yang datang untuk meminta layanan, seperti pelanggan di loket layanan, mobil di sebuah SPBU, pesawat udara yang *landing* atau *take off*, dan sebagainya (Haming, 2017). Unsur populasi atau kedatangan biasa dinamakan sebagai proses masukan. Proses masukan mencakup sumber kedatangan yang dapat disebut sebagai sumber populasi biasanya adalah proses *random* (Mulyono, 2016).

Calling population (sumber populasi) adalah asal dari mana objek yang dilayani berasal. Pada dasarnya terdapat 2 sumber yaitu *Infinite Source Model* dan *Finite Source Model*. perbedaaan sumber yang dimaksud akan dijelaskan pada poin-poin sebagai berikut:

1. *Infinite Source Model*

Tipe ini merupakan model unit analisis antrian dengan objek yang datang meminta pelayanan pada fasilitas servis yang jumlahnya tidak tentu (*random*), contohnya kendaraan bermotor yang tiba di SPBU, pelanggan yang datang ke sebuah restoran, swalayan, *department store*, bengkel kendaraan bermotor, merupakan sistem yang sumber populasinya bersifat tidak terhingga. Kedatangan mereka ke sistem untuk meminta pelayanan bersifat *random*. Objek tiba dengan jadwal yang tidak dapat ditentukan terdapat kemungkinan pada jam tertentu tidak ada, dan pada jam yang lain pelanggan berdatangan dengan jumlah yang banyak. Gejala kedatangan bersifat acak ini menjadi penyebab terjadinya antrian pada fasilitas servis.

2. *Finite Source Model*

Tipe ini merupakan model dengan sumber unit analisis antrian yang datang meminta pelayanan pada fasilitas servis adalah tertentu atau terdefinisi jumlahnya. Contohnya adalah, pegawai sebuah kantor yang berjumlah 125 orang maka pegawai yang datang meminta layanan di Departemen SDM berupa naik pangkat atau kenaikan gaji berkala adalah 125 orang, mungkin saja

mereka datang beberapa orang sekaligus atau secara bergiliran (Haming, 2017, h. 225).

2.2.2 Disiplin Pelayanan

Sinalungga (2008, h. 251) mendefinisikan disiplin pelayanan sebagai suatu aturan pemilihan konsumen dari deretan antrian untuk mendapatkan pelayanan sesegera mungkin. Disiplin pelayanan yang sangat diperlukan dalam analisis model antrian terbagi ke dalam empat jenis, yaitu:

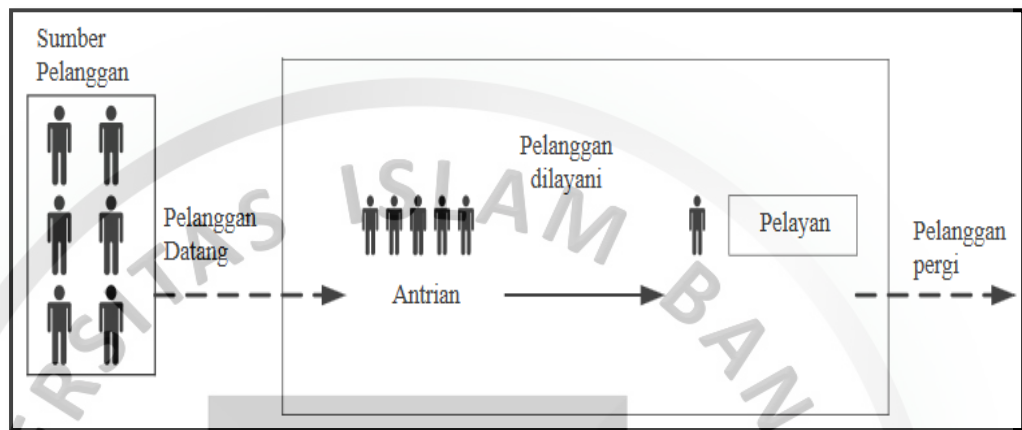
- a. *First Come First Serve* (FCFS) adalah suatu antrian yang mendahului pelanggan yang lebih awal datang untuk mendapatkan pelayanan lebih awal. Misalnya, antrian di loket pembayaran tol.
- b. *Last Come First Serve* (LCFS) merupakan antrian yang mendahului pemberian pelayanan pada yang datang terakhir. Misalnya, antrian pada tumpukan karung beras di truk. Karung beras yang terakhir masuk akan terletak pada tumpukan teratas, sehingga karung beras tersebut akan diambil pertama kali.
- c. *Service in Random Order* (SIRO) adalah prioritas pelayanan yang berdasarkan pada peluang secara *random*, tidak memperhatikan pada yang lebih awal datang. Contohnya nomor-nomor undian yang menunggu keluar berdasarkan pengundian secara acak.
- d. *Priority Service* (PS) artinya prioritas pelayanan yang mendahulukan orang yang memiliki prioritas tertinggi dibandingkan prioritas terendah, walaupun yang terakhir dilayani sudah datang lebih awal dalam garis antrian. Misalnya, seorang pasien dengan keadaan penyakit yang lebih darurat untuk ditangani dibandingkan pasien lainnya di tempat layanan kesehatan.

2.2.3 Desain Pelayanan

Sinalungga (2008, h. 249) mengemukakan bahwa desain pelayanan dapat dikelompokkan dalam *channel* dan *phase* yang akan membangun berbagai macam bentuk struktur antrian. Taha (2007, h. 522) menambahkan bahwa desain dari sarana pelayanan dapat dibuat *server* yang berbentuk paralel, seperti kantor pos atau pada *teller* bank. *Server* dapat pula disusun seri, seperti loket-loket pada perpanjangan SIM, ataupun dapat dibentuk seperti sebuah *network*, seperti *router* pada jaringan komputer. Berikut penerapan model struktur antrian yang umum dipakai dalam suatu sistem antrian:

a. Satu Saluran – Satu Tahap (*Single Channel – Single Phase*)

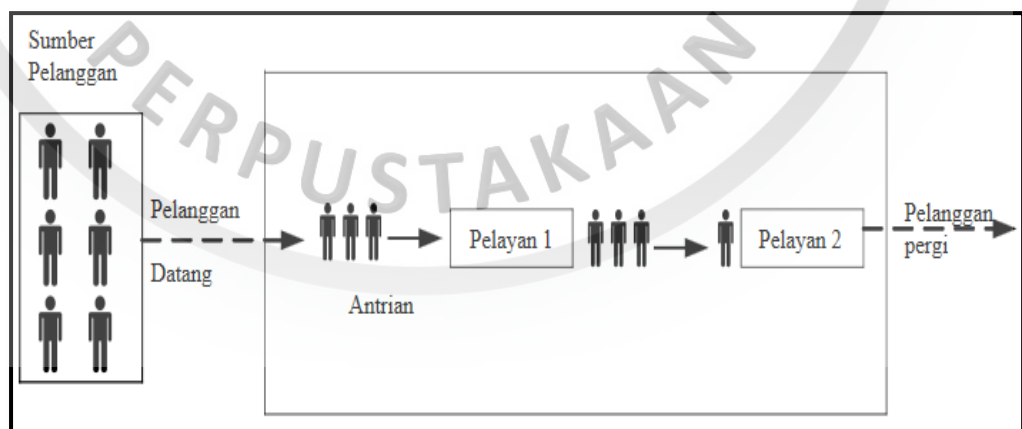
Pada jenis desain pelayanan ini, sarana pelayanan cuma mempunyai satu *server* (pelayan) dalam sistem antriannya. Cuma terdapat satu pelayan yang dapat melayani (*single channel*) dan sistem antrian cuma mempunyai satu tahap pelayanan (*single phase*). Hal ini dapat dijelaskan dalam contoh gambar berikut:



Gambar 2.1 Satu saluran – satu tahap

b. Satu Saluran – Banyak Tahap (*Single Channel – Multi Phase*)

Dalam desain pelayanan ini, sarana pelayanan mempunyai pelayan yang dibuat berurutan atau seri atau dapat pula dikatakan dibuat menjadi beberapa tahap dalam sistem antriannya. Penerapan dari desain pelayanan ini dapat dilihat pada loket-loket dalam proses perpanjangan SIM yang disusun secara berurutan. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat dari contoh gambar berikut:

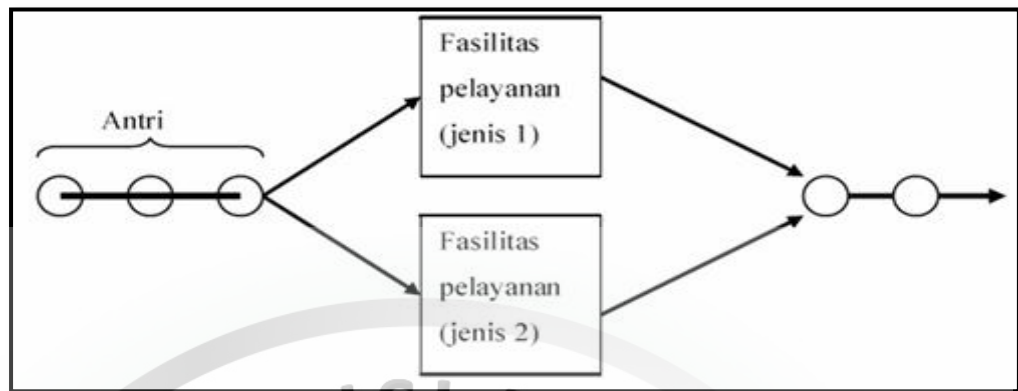


Gambar 2.2 Satu saluran – banyak tahap

c. Banyak Saluran – Satu Tahap (*Multi Channel – Single Phase*)

Desain pelayanan ini mempunyai pelayan yang tersusun secara paralel yang dialiri dari satu antrian tunggal. Hal ini dapat dilihat pada antrian nasabah di

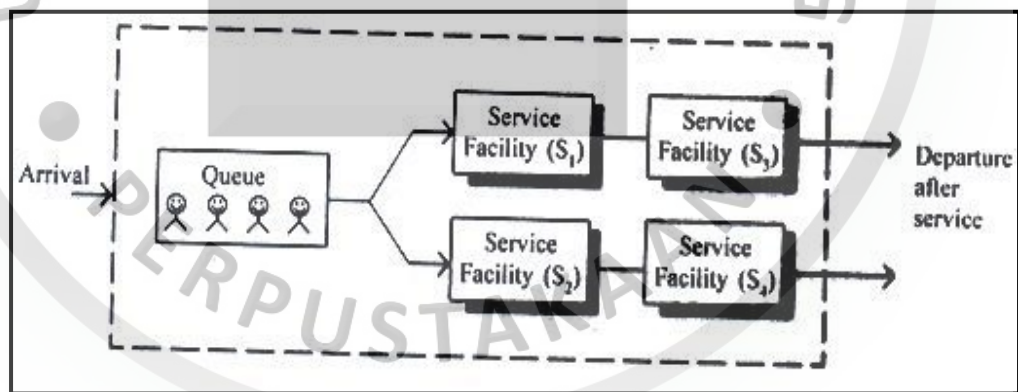
bank dengan beberapa loket teller, sebagaimana digambarkan dalam gambar di bawah ini:



Gambar 2.3 Banyak saluran – satu tahap

d. Banyak Saluran – Banyak Tahap (*Multi Channel – Multi Phase*)

Desain pelayanan ini mempunyai satu antrian tunggal yang melintasi beberapa lintasan pelayan yang berbentuk paralel dan tiap lintasan pelayan tersebut ada beberapa pelayan yang berbentuk seri. Hal ini dapat dilihat pada loket pendaftaran pasien di rumah sakit. Pasien mendaftarkan di rumah sakit menuju loket pendaftaran yang terdiri dari beberapa loket, kemudian pasien melanjutkan dengan menuju klinik yang diinginkan. Untuk lebih jelasnya diilustrasikan pada gambar berikut:



Gambar 2.4 Banyak saluran – banyak tahap

2.3 Model-Model Antrian

Model antrian memiliki ciri khas dan asumsi yang dinotasikan secara baku sebagai berikut:

$$(a/b/c/d/e)$$

Sumber: Taha (2007)

a, b, c, d, e adalah simbol dari unsur dasar model antrian:

a = distribusi kedatangan yaitu jumlah kedatangan per periode waktu

b = distribusi waktu pelayanan

c = jumlah fasilitas pelayanan ($c = 1, 2, 3, \dots$)

d = jumlah terbesar yang diperbolehkan ada pada sistem (dalam pelayanan ditambah yang di garis tunggu).

e = ukuran sumber populasi

Notasi baku bagi simbol a (distribusi kedatangan) dan b (distribusi waktu pelayanan) memiliki kode berikut:

M = kedatangan dan waktu pelayanan berdistribusi Poisson (Markovian)

D = kedatangan dan waktu pelayanan deterministik (konstan)

E_k = kedatangan dan waktu pelayanan mengikuti distribusi Erlang atau Gamma

Misalnya:

$$(M / D / 5 / N / \infty)$$

Hal ini dapat diartikan tingkat kedatangan mengikuti *poisson distribution*, waktu pelayanan tetap, sarana pelayanan ada 5, pembatasan jumlah pelanggan, dan tidak ada pembatasan sumber populasi. Beberapa model-model antrian yang umum di antaranya:

1. **Model $(M / M / 1 / \infty / \infty)$**

- Distribusi dari kehadiran adalah *poisson distribution*.
- Distribusi dari waktu pelayanan adalah *exponential distribution*.
- Model ini memakai jenis disiplin antrian FCFS
- Tidak ada pembatasan sumber populasi
- Jalur antriannya tunggal
- Rata-rata kehadiran lebih rendah dibandingkan rata-rata pelayanan
- Tidak ada pembatasan pada kapasitas tunggu

2. **Model $(M / M / C / \infty / \infty)$**

Pada model ini sarana pelayanan (*server*) bersifat ganda, rata-rata tingkat kedatangan lebih kecil daripada penjumlahan seluruh rata-rata tingkat pelayanan di tiap jalur. Syarat yang lain sama dengan model *server* tunggal.

3. **Model $(M / M / 1 / N / \infty)$**

Model ini merupakan variasi dari model yang pertama, dimana panjang antrian atau kapasitas tunggu dibatasi maksimum N individu. Jumlah maksimum ini meliputi individu yang menunggu dan yang sedang dilayani.

4. Model (M / M / 1 / ∞ / N)

Model keempat mirip dengan model kesatu, tetapi ada pembatasan sumber populasi sebesar N.

2.4 Distribusi Kedatangan

Model antrian merupakan model peluang dikarenakan elemen-elemen yang ada dalam model merupakan variabel acak yang mengikuti distribusi peluang tertentu. Dalam suatu proses antrian, baik kedatangan maupun waktu pelayanan biasanya merupakan variabel acak. Jumlah kedatangan per periode waktu biasanya diasumsikan mengikuti *Poisson distribution*. Berikut formula dari distribusi peluang *Poisson*:

$$P_{(x)} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{x!} \dots\dots\dots(2.1)$$

Menurut Mulyono (2016):

- x = jumlah kedatangan per periode waktu
- λ = rata-rata waktu kedatangan
- e = 2,71828

2.5 Pola Pelayanan

Pola pelayanan ditetapkan berdasarkan dari waktu pelayanan. Waktu pelayanan adalah waktu yang diperlukan dalam memberikan pelayanan kepada pelanggan di suatu sarana pelayanan. Waktu pelayanan dapat berupa konstanta atau variabel *random* yang sudah diketahui peluangnya. Tingkat pelayanan merupakan banyaknya pelanggan yang mendapatkan pelayanan per periode waktu. Diasumsikan bahwa saluran (*channel*) senantiasa berada dalam situasi sibuk, sehingga tidak ada waktu menganggur (*idle time*) yang terjadi pada saluran itu. Waktu pelayanan di antara sarana pelayanan yang satu dengan sarana pelayanan lainnya umumnya tidak deterministik. Waktu layanan umumnya berdistribusi peluang eksponensial, yang rumusnya dapat menerangkan hal yang bermanfaat tentang operasi yang berlangsung dalam suatu antrian. Waktu pelayanan biasanya mengikuti distribusi eksponensial negatif. Adapun rumus yang digunakan adalah

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \dots\dots\dots(2.2)$$

Dimana menurut Mulyono (2016):

- t = waktu pelayanan
- $f(t)$ = peluang atau fungsi dari waktu pelayanan
- μ = rata-rata waktu pelayanan
- $1/\mu$ = 1 / rata-rata waktu pelayanan
- e = 2,71828

2.6 Formula Model M/M/C

Pelanggan yang menanti giliran untuk mendapatkan pelayanan diasumsikan membentuk satu jalur dan akan mendapatkan pelayanan pada stasiun pelayanan yang ada pertama kali pada waktu itu. Pola kedatangan pada model ini diasumsikan berdistribusi eksponensial negatif. Jenis disiplin pelayanannya adalah FCFS serta diasumsikan bahwa seluruh stasiun pelayanan mempunyai tingkat pelayanan yang serupa. Adapun formula dalam penggunaan model ini adalah:

- 1) Probabilitas terdapat 0 orang dalam sistem (tidak adanya pelanggan dalam sistem)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{N=0}^{c-1} \left\{ \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right\} + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c / c! (1 - \frac{\lambda}{c\mu})} \dots (2.3)$$

- 2) Rata-rata jumlah pelanggan mengantri dalam antrian

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \lambda \mu}{(c-1)!(c\mu - \lambda)^2} P_0 \dots (2.4)$$

- 3) Rata-rata jumlah pelanggan mengantri dalam sistem

$$L_s = \lambda W_s = L_s + \frac{\lambda}{\mu} \dots (2.5)$$

- 4) Rata-rata waktu pelanggan mengantri dalam antrian

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda} \dots (2.6)$$

- 5) Rata-rata waktu pelanggan mengantri dalam sistem

$$w_s = w_q + (1/\mu) \dots (2.7)$$

Dimana simbol-simbol di atas memiliki pengertian:

- ρ = tingkat kesibukan sistem
- c = jumlah server
- λ = waktu rata-rata kedatangan
- μ = waktu rata-rata pelayanan

2.7 Model Keputusan

Analisis teori antrian bukanlah suatu teknis optimasi langsung seperti program linier atau sejenisnya. Analisis pada teori antrian dipakai untuk

mendapatkan harga-harga dari sistem yang dianalisis, misalnya parameter rata-rata jumlah kedatangan pada suatu interval tertentu atau harga parameter rata-rata waktu pelayanan yang diberikan pada setiap konsumen yang membentuk barisan antrian, atau juga parameter waktu menunggu, parameter panjang antrian, dan parameter utilitas sarana pelayanan, kedua parameter ini dibandingkan akan menunjukkan kondisi dari sistem yang diambil. Salah satu pendekatan yang dipakai untuk meningkatkan performansi suatu sistem yaitu untuk mengoptimalkan hasil yang diinginkan, optimasi parameter sistem dapat dilakukan dengan dua cara, pertama model minimasi ongkos dan yang kedua model aspirasi. Model minimasi ongkos dapat dipakai jika ongkos waktu pelayanan dan ongkos waktu menunggu pelayanan ditentukan besarnya. Akan tetapi cara ini umumnya sulit untuk dilakukan karena ongkos waktu menunggu bagi setiap konsumen akan sangat berbeda besarnya, apalagi untuk sistem dengan input yang sangat beraneka ragam. Cara yang kedua dikenal dengan model tingkat aspirasi. Model ini digunakan untuk menentukan nilai optimal sistem. Nilai optimal dalam metode ini didesain secara langsung dari harga-harga parameternya dengan anggapan bahwa keputusan yang diambil adalah optimal jika memenuhi batas-batas aspirasi yang diharapkan oleh pengambil keputusan atau pertimbangan preferensi tertentu.

2.8 Model Tingkat Aspirasi

Pengambilan keputusan yang berkaitan dengan antrian dapat dilaksanakan melalui pemakaian model keputusan yang tepat. Optimalisasi dari parameter dapat dilakukan melalui berbagai cara yang disesuaikan dengan kehendak dari pengambil keputusan. Pandangan secara umum biasanya didasarkan pada keputusan yang meminimalkan jumlah pelayanan dan antrian per periode waktu. Tekadang sulit hingga tidak mungkin melakukan penaksiran parameter ongkos yang dibutuhkan, maka dari itu dapat dipakai kriteria optimalisasi lain yang disebut model tingkat aspirasi atau *level aspiration*. Pada model keputusan yang memakai *level aspiration*, keputusan diambil berdasarkan dari sudut pemenuhan *level aspiration* tertentu yang ditentukan oleh pengambil keputusan.

Pada model pelayanan berganda ada 2 ukuran konflik yang berpengaruh dalam menetapkan nilai c yang optimum, yaitu:

- a. Terdapat ekspektasi *idle time* dalam sistem antrian (W_s)
- b. Terdapat persentase dari pelayanan untuk waktu menunggu (X)

Hasil kedua pengukuran ini sangat berpengaruh terhadap aspirasi dari orang dan pelayanan. Jika dikatakan bahwa tingkat aspirasi terletak pada *upper limit* (batas atas), untuk W_s dan X dimisalkan α dan β , maka metode tingkat aspirasi dapat dinyatakan secara matematis sebagai berikut:

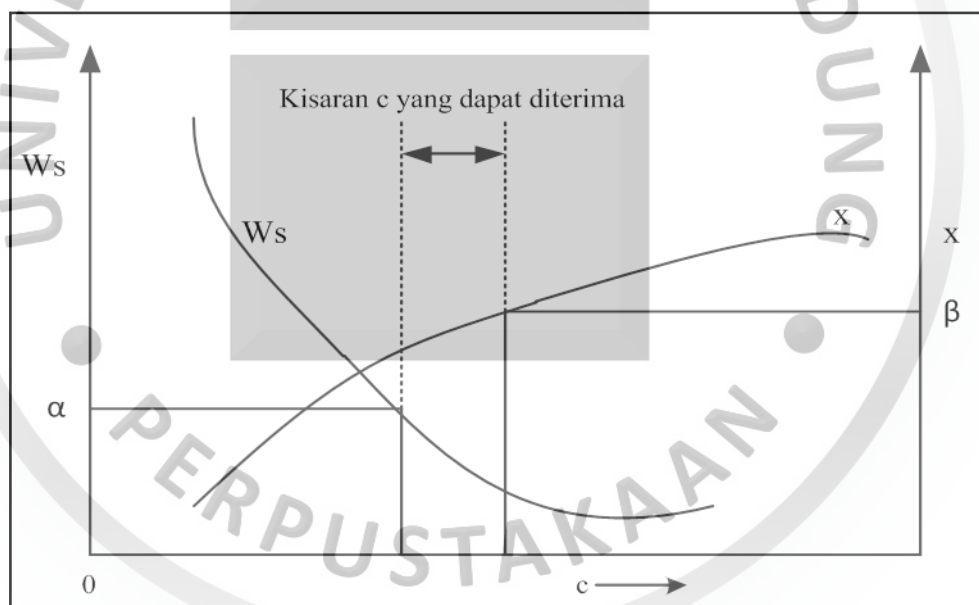
- Melakukan analisis untuk memperoleh jumlah pelayanan (c) dengan W_s lebih kecil atau sama dengan α dan X lebih kecil atau sama dengan β .
- Pada model pelayanan berganda butuh menetapkan jumlah pelayanan (c) yang optimum, dua ukuran yang dipakai adalah:

Persentase *idle time* para pelayan (X) melalui

$$\text{Rasio Pemanfaatan} = \frac{100\lambda}{c\mu} \text{ dan}$$

$$X = 100 - \text{Rasio Pemanfaatan}$$

W_s dan X dapat diketahui melalui formula yang ada di teori antrian. Gambar 2.5 memberikan petunjuk daerah c yang dapat diterima sekaligus pemenuhan persyaratan yang telah ditetapkan yaitu melalui penempatan nilai α dan β .



Gambar 2.5 Grafik dari model keputusan tingkat aspirasi
Sumber: Kakiay (2007)

Keterangan:

c = Jumlah *server*

W_s = Rata-rata waktu dalam sistem

x = Persentase dari pelayanan untuk *idle time*

α = Aspirasi pelanggan

β = Keinginan perusahaan

Pada grafik tingkat aspirasi, penetapan nilai α dan β akan dapat secara langsung ditentukan *range* penilaian nilai c yang sudah memenuhi kendala W_s dan X . Jika kedua kendala belum teratasi, maka perlu mencari perubahan yang ada di salah satu ataupun kedua kendala sebelum melakukan pengambilan keputusan.

