BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendahuluan

Sebelum melakukan pembahasan mengenai permasalah dari skripsi ini, pada bab ini akan diuraikan beberapa teori penunjang yang dapat membantu untuk menyelesaikan bahasan pokok. Teori penunjang yang akan diuraikan diantaranya meliputi: beberapa distribusi peubah acak kontinu, seperti distribusi normal, distribusi Cauchy, distribusi von Mises, distribusi wrapped Cauchy, data sirkular, analisis statistika mengenai regresi linier sederhana, menaksir koefisien regresi linier sederhana, uji keberartian koefisien regresi linier sederhana, asumsi regresi linier sederhana, model regresi sirkular sederhana, penaksiran parameter regresi sirkular sederhana, ragam asimptotik dari penaksir parameter regresi sirkular sederhana dan selang kepercayaan regresi sirkular sederhana.

2.2 Beberapa Distribusi Peubah Acak Kontinu

Peubah acak adalah jumlah yang diukur sehubungan dengan percobaan acak (Ash, 2000). Peubah acak yang nilai-nilainya berhingga banyaknya disebut peubah acak diskrit. Sebaliknya, peubah acak yang nilai-nilainya tak berhingga banyaknya disebut peubah acak kontinu. Berikut merupakan beberapa contoh distribusi peubah acak kontinu.

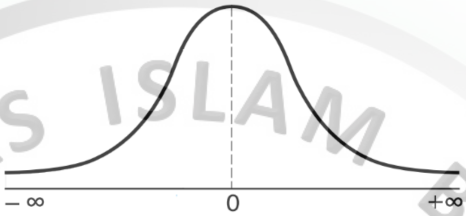
2.2.1 Distribusi Normal

Distribusi normal atau distribusi gauss merupakan salah satu distribusi yang paling penting dan banyak digunakan. Rumus umum untuk fungsi densitas dari peubah acak X berdistribusi normal sebagai berikut:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{2.1}$$

untuk setiap $-\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty,$ dan $\sigma^2 > 0.$

dimana μ adalah parameter rata-rata distribusi, σ adalah simpangan baku distribusi. Ciri-ciri distribusi normal yakni berbentuk lonceng simetris terhadap $X = \mu$, dengan rata-rata μ, ragam σ^2, dan fungsi pembangkit momen $e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$. Dengan kurva sebagai berikut:



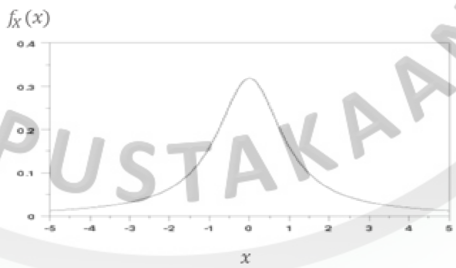
Gambar 2.1 Kurva Distribusi Normal

2.2.2 Distribusi Cauchy

Distribusi Cauchy merupakan distribusi peluang dengan fungsi densitas dari peubah acak X sebagai berikut:

$$f_X(x) = \frac{b}{\pi(b^2 + (x-a)^2)} \tag{2.2}$$

untuk setiap $-\infty < x < \infty, -\infty < a < \infty,$ dan $b > 0$. Dengan kurva sebagai berikut:



Gambar 2.2 Kurva Distribusi Cauchy

Distribusi Cauchy tidak memiliki nilai harapan, ragam, *skewness*, kurtosis dan fungsi pembangkit momen, tetapi hanya memiliki satu penciri yaitu fungsi karakteristik. Definisi fungsi karakteristik hampir sama dengan definisi fungsi pembangkit momen. Perbedaan fungsi karakteristik dengan fungsi pembangkit momen hanya pada keberadaan bilangan imajiner yang menunjukkan bahwa ruang lingkup fungsi karakteristik adalah ruang kompleks sedangkan fungsi pembangkit momen terbatas pada ruang riil saja. Sehingga, fungsi karakteristik lebih bersifat umum dibandingkan dengan fungsi pembangkit momen. Fungsi karakteristik dari distribusi Cauchy dinyatakan sebagai berikut:

$$\varphi_X(t) = e^{iat}e^{-b|t|} \tag{2.3}$$

Sifat-sifat dasar fungsi karakteristik dari distribusi Cauchy sebagai berikut (Huda, 2016):

a. Fungsi karakteristik dari distribusi Cauchy saat $t = 0$ adalah 1.
b. Jika $\varphi_X(t) = e^{iat}e^{-b|t|}$ adalah fungsi karakteristik dari peubah acak X yang berdistribusi Cauchy maka fungsi karakteristik dari peubah acak $-X$ adalah $\overline{\varphi_X(t)} = e^{iat}e^{-b|t|}$.
c. Jika X adalah suatu peubah acak berdistribusi Cauchy, maka fungsi karakteristik dari $p + qX$ adalah $\varphi_{p+qX}(t) = e^{iat}\varphi_X(qt)$.
d. Distribusi Cauchy tidak menyebar simetrik terhadap ordinat $X = 0$, sedemikian sehingga fungsi karakteristik dari distribusi Cauchy tidak hanya bernilai riil.
e. Fungsi karakteristik dari distribusi Cauchy adalah kontinu seragam.

2.2.3 Distribusi von Mises

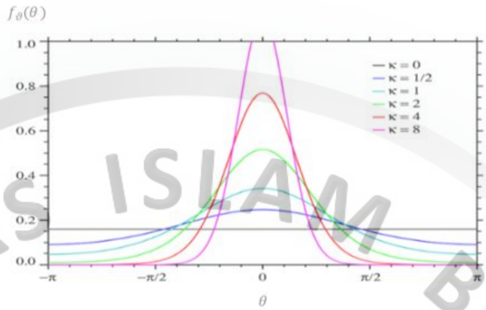
Distribusi von Mises diperkenalkan oleh von Mises (1918). Ditribusi von Mises merupakan distribusi paling umum yang dipertimbangakan untuk sampel unimodal data sirkular. Fungsi densitas dari peubah acak ϑ yang berdistiribusi von Mises sebagai berikut:

$$f_\vartheta(\theta; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi\, \mathrm{I}_0(\kappa)} \exp \kappa(\cos(\theta - \mu)), 0 < \theta, \mu \leq 2\pi, \kappa \geq 0 \tag{2.4}$$

dimana μ adalah rata-rata arah, κ adalah parameter konsentrasi, dan $\mathrm{I}_0(\kappa)$ adalah fungsi modifikasi Bessel dari ciri pertama dan urutan ke nol, diperoleh dari:

$$\mathrm{I}_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(k\cos\theta)\, d\theta = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2r}\left(\frac{1}{r!}\right)^2 \quad (2.5)$$

dengan kurva sebagai berikut:



Gambar 2.3 Kurva Distribusi von Mises

Jammalamadaka dan SenGupta (2001) dalam Abuzaid (2010) merangkum beberapa sifat densitas dari von Mises, yaitu:

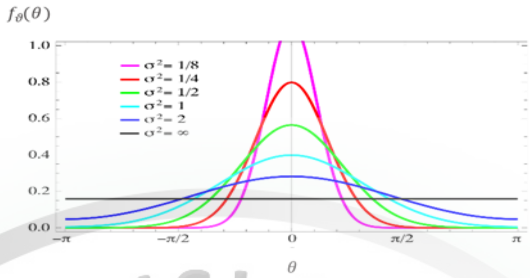
a. Simetris mengenai rata-rata arah μ
b. Memiliki modus pada μ, dan
c. Memiliki antimodus pada $(\mu \pm \pi)$

2.2.4 Distribusi wrapped Cauchy

Sebagai model unimodal dan simetris pada lingkaran, distribusi wrapped Cauchy merupakan salah satu peran penting dalam statistika yang berhubungan dengan arah. Fungsi densitas dari peubah acak ϑ yang berdistiribusi wrapped Cauchy sebagai berikut:

$$f_\vartheta(\theta;\mu,\rho) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\mu)}, \quad 0 < \theta, \mu < 2\pi, 0 \le \rho < 1 \quad (2.6)$$

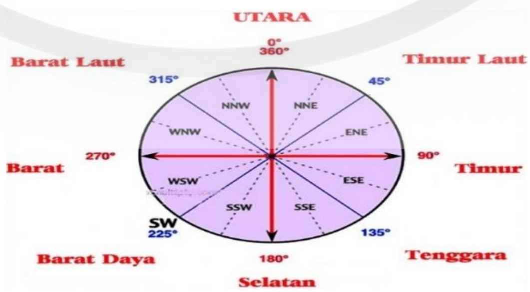
dimana μ adalah rata-rata sirkular dan ρ adalah parameter konsentrasi. Kolassa dan McCullagh (1990) dalam Abuzaid dan Allahham (2015) mengilustrasikan bahwa distribusi wrapped Cauchy memiliki sifat tambahan dan teorema limit pusat, dengan kata lain, penjumlahan dari distribusi wrapped Cauchy $WC(\mu_1, \rho_1)$ dan $WC(\mu_2, \rho_2)$ merupakan distribusi wrapped Cauchy $WC(\mu_1 + \mu_2, \rho_1 + \rho_2)$, serta bersifat *heavy tailed.* Dengan kurva sebagai berikut:



Gambar 2.4 Kurva Distribusi wrapped Cauchy

2.3 Data Sirkular

Data sirkular adalah data yang hasil pengukurannya berupa sudut berbentuk lingkaran. Data sirkular diukur dalam derajat yaitu dari 0° sampai dengan 360° atau dapat dinyatakan dalam bentuk radian 0 sampai dengan 2π. Data sirkular merupakan pengukuran data yang berulang secara periodik, yaitu data yang akan kembali ditemukan setelah mencapai titik maksimum dari data tersebut. Data sirkular dibagi menjadi dua jenis, yaitu data sirkular berdasarkan arah dan data sirkular berdasarkan waktu. Data sirkular berdasarkan arah adalah data yang pengukurannya berupa arah, seperti arah mata angin, migrasi burung, dan arah navigasi. Untuk arah utara dianggap sebagai 0°, timur sebagai 90°, selatan sebagai 180°, dan barat sebagai 270°. Adapun gambar untuk arah mata angin sebagai berikut:

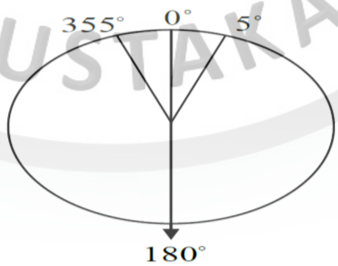


Gambar 2.5 Arah Mata Angin

Anemometer merupakan alat yang digunakan untuk mengukur kecepatan dan arah angin. Bagian dari anemometer yang digunakan untuk menentukan arah angin yaitu baling-baling. Baling-baling anemometer terdiri dari lengan horizontal tipis yang disatu sisi dipasang pelat datar vertikal dan di sisi lainnya dipasang bobot keseimbangan yang juga berfungsi sebagai petunjuk. Dari mana angin itu berasal menyatakan arah dari angin tersebut, misal angin bertiup dari barat menuju ke timur disebut angin barat (Met Office, 2010). Gambar untuk baling-baling pada anemometer disajikan pada Gambar 2.6 sebagai berikut:

Gambar 2.6 Baling-baling pada Anemometer

Menerapkan teknik perhitungan yang biasa pada data sirkular dapat menuju kesimpulan yang keliru. Misalnya, untuk menghitung rata-rata dari dua sudut 5° dan 355°, dengan menerapkan teknik perhitungan rata-rata yang biasa akan menghasilkan 180°, sedangkan rata-rata dengan teknik perhitungan untuk data sirkular seperti pada Persamaan (2.7) harusnya 0°. Untuk lebih jelasnya tersaji pada Gambar 2.6 sebagai berikut:



Gambar 2.7 Rata-rata untuk sudut 5° dan 355°

Data sirkular berdasarkan waktu adalah data yang pengukurannya dalam bentuk waktu, seperti jam, hari, dan bulan. Pada proses perhitungannya, data sirkular harus dikonversi ke dalam bentuk radian agar dapat dianalisis menggunakan statistika sirkular (Mardia dan Jupp, 2000 dalam Rohazim, 2016). Rumus yang digunakan untuk menghitung rata-rata arah dari data sirkular sebagai berikut:

$$\bar{\theta} = \begin{cases} tan^{-1}\left(\frac{S}{C}\right), jika\ S \geq 0, C > 0 \\ \frac{\pi}{2}, jika\ S > 0, C = 0 \\ tan^{-1}\left(\frac{S}{C}\right) + \pi, jika\ C < 0 \\ tan^{-1}\left(\frac{S}{C}\right) + 2\pi, jika\ S < 0, C \geq 0 \\ undefined, jika\ S = 0, C = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

dimana $C = \sum_{i=1}^{n} \cos\theta_i,\ S = \sum_{i=1}^{n} \sin\theta_i.$ (2.8)

Adapun untuk menghitung nilai ragam dari data sirkular dihitung dengan rumus:

$$V = 1 - \bar{R}, \text{ dengan } R = \sqrt{C^2 + S^2} \text{ dan } \bar{R} = \frac{R}{n}. \tag{2.9}$$

Dalam memodelkan data sirkular, terdapat beberapa distribusi yang dapat digunakan yakni distribusi von Mises dan distribusi wrapped Cauchy.

2.4 Analisis Statistika

Analisis yang digunakan untuk memodelkan hubungan fungsional antar satu peubah bebas dan satu peubah takbebas yaitu analisis regresi linier sederhana. Adapun jika data pengamatan yang digunakan merupakan data sirkular maka analisis regresi yang digunakan adalah analisis regresi sirkular sederhana.

2.4.1 Analisis Regresi Linier Sederhana

Peubah bebas pada umumnya dilambangkan dengan X atau disebut juga dengan prediktor sedangkan, peubah takbebas dilambangkan dengan Y atau disebut juga dengan respon. Persamaan regresi linear sederhana sebagai berikut:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{2.10}$$

dimana:

y_i = nilai dari peubah takbebas ke i x_i = nilai dari peubah bebas ke i

α = koefisien regresi, intersep β = koefisien *slope*

ε_i = kekeliruan N = ukuran populasi

Model (2.10) diperoleh dari populasi, apabila menggunakan sampel berukuran n maka model taksiran yang diperoleh sebagai berikut:

$$y_i = a + bx_i + e_i \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.11}$$

dimana:

a = penaksir α b = penaksir β

e_i = sisaan

Karena antara peubah takbebas y sebenarnya dengan peubah takbebas yang diperoleh dari model regresi berbeda, maka untuk peubah takbebas yang didapat dari model regresi akan diberi lambang y dengan topi yakni $\hat{y}$ (Achmad, 2010).

2.4.2 Menaksir Koefisien Regresi Linier Sederhana

Untuk menaksir koefisien regresi dapat digunakan metode kuadrat terkecil, dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat sisaan. Dengan menggunakan model (2.11) didapat e_i:

$$e_i = y_i - \hat{y} \tag{2.12}$$

atau

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - a - bx_i)^2$$

Turunkan terhadap a dan b samakan dengan nol menjadi:

$$\frac{\sum e_i^2}{\partial a} = -2 \sum (y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\frac{\sum e_i^2}{\partial b} = -2\sum(x_i y_i - \ a x_i - \ b x_i^2) = 0$$

sehingga

$$\sum y_i - na - b\sum x_i = 0$$

$$\sum x_i y_i - a\sum x_i - b\sum x_i^2 \ = 0$$

dengan menggunakan cara eliminasi, didapat b dan a sebagai berikut:

$$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad (2.13\ a)$$

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum {x_i}^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad (2.13\ b)$$

2.4.3 Uji Keberartian Koefisien Regresi Linier Sederhana

Uji keberartian koefisien regresi bertujuan untuk menguji apakah model regresi baik/signifikan atau tidak baik/tidak signifikan. Uji keberartian koefisien regresi diperiksa melalui pengujian hipotesis nol bahwa koefisien regresi khususnya β, sama dengan nol (tidak berarti) melawan hipotesis tandingan bahwa koefisien regresi tidak sama dengan nol, atau dapat ditulis sebagai berikut:

a. Hipotesis

   H_0 : $\beta = 0$; Koefisien regresi tidak berarti.

   H_1 : $\beta \neq 0$; Koefisien regresi berarti.

b. Statistik uji

Statistik uji yang digunakan untuk menguji hipotesis di atas adalah F Snedecor dengan menghitung harga-harga Jumlah Kuadrat b dan a tetap yang biasa ditulis JK $(b|a)$ dan Jumlah Kuadrat Total sebagai berikut:

$$JK\ (b|a) = b\left\{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}\right\} \tag{2.14}$$

$$JK\ Total = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} \tag{2.15}$$

$$JK\ Sisa = JK\ Total - JK(b|a) \tag{2.16}$$

Kemudian disajikan dalam bentuk tabel Analisis Varians (ANAVA) seperti berikut:

Tabel 2.1 Analisis Varians Untuk Regresi Linear Sederhana

Sumber	dk	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)	F-hitung
Regresi $(b\|a)$	1	JK $(b\|a)$	JK $(b\|a)$/1	KT Reg/ KT Sisaan
Sisaan	n-2	JK Sisaan	JK Sisaan/n-2	
Total	n-1	JK Total		

$$F = \frac{\text{KT Reg } (b|a)}{\text{KT Sisaan}} \tag{2.17}$$

c. Kriteria Uji

Tolak hipotesis H_0 jika nilai statistik uji F lebih besar dari nilai kritis pada taraf nyata α yang ditetapkan, yang artinya koefisien regresis berarti. Sebaliknya, terima hipotesis H_0 jika nilai statistik uji F kurang dari nilai kritis pada taraf nyata α yang ditetapkan, yang artinya koefisien regresis berarti.

Selain dengan menggunakan uji F, uji keberartian koefisien regresi juga dapat menggunakan penaksir selang kepercayaan. Penaksir selang kepercayaan lebih informatif, karena selang kepercayaan mencerminkan ketepatan penaksir. Selang kepercayaan $100(1-\gamma)\%$ masing-masing untuk koefisien regresi α dan β sebagai berikut:

$$a \pm t_{(0.025,v)} s(a) \text{ dan } b \pm t_{(0.025,v)} s(b) \tag{2.18}$$

dimana:

$s(a)$ = simpangan baku dari a $s(b)$ = simpangan baku dari b

2.4.4 Asumsi Regresi Linier Sederhana

Beberapa asumsi yang harus dipenuhi dalam analisis regresi linier sederhana yaitu sisaan berdistribusi normal, ragam sisaan homogen, serta tidak ada korelasi diantara sisaan untuk data pengamatan berupa deret waktu. Uji untuk sisaan yang berdistribusi normal diperoleh dengan menggunakan uji Kolmogorov-smirnov. Ragam sisaan yang homogen dapat dilihat berdasarkan plot antar nilai sisaan dengan nilai dugaan, dimana pola yang diharapkan menyebar disekitar nol. Sedangkan untuk korelasi antar sisaan, dilihat berdasarkan plot antar sisaan ke-t dengan sisaan ke-$(t-1)$ dengan harapan penyebaran tidak berpola (Rawlings dkk, 1998).

Dalam skripsi ini, karena data pengamatan berupa data sirkular, maka digunakan analisis regresi sirkular sederhana dengan asumsi sisaan berdistribusi wrapped Cauchy.

2.5 Model Regresi Sirkular Sederhana

Terdapat n pasang buah pengamatan sirkular yakni (x_1, y_1),…, (x_n, y_n) dari dua peubah sirkular X dan Y yang mempunyai hubungan linier. Maka model regresi sirkular sederhana yang diperoleh sebagai berikut:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i \ (mod\ 2\pi), \quad i = 1, \dots, n \tag{2.19}$$

dimana α adalah parameter *intercept*, β adalah parameter *slope* dan e adalah sisaan acak sirkular yang berdistribusi wrapped Cauchy dengan rata-rata 0 dan parameter konsentrasi ρ.

2.6 Penaksiran Parameter Regresi Sirkular Sederhana

Berdasarkan fungsi densitas peluang wrapped Cauchy pada Persamaan (2.6), maka densitas sisaan pada model (2.19) diperoleh sebagai berikut:

$$f(e;\alpha,\beta,\rho)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(e)} \tag{2.20}$$

$$f(x,y;\alpha,\beta,\rho)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(y_i-\alpha-\beta x_i)} \tag{2.21}$$

Fungsi densitas peluang pada Persamaan (2.21) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$f(x,y;\alpha_1,\alpha_2,\beta)=\frac{1}{2\pi}\frac{c}{(1-\alpha_1\cos(y_i-\beta x_i)-\alpha_2\sin(y_i-\beta x_i))} \tag{2.22}$$

dimana $c=\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}=\sqrt{1-{\alpha_1}^2-{\alpha_2}^2}$, (2.23 a)

$$\alpha_1=\frac{2\rho}{1+\rho^2}\cos\alpha \text{ dan } \alpha_2=\frac{2\rho}{1+\rho^2}\sin\alpha \tag{2.23 b}$$

Fungsi likelihood dari $e_1,e_2,\ldots,e_n$ dalam model (2.19) diperoleh sebagai berikut:

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\frac{c}{(1-\alpha_1\cos(y_i-\beta x_i)-\alpha_2\sin(y_i-\beta x_i))}$$

$$=(2\pi)^{-n}\times(1-\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{\frac{n}{2}}\times(1-\alpha_1\cos(y_i-\beta x_i)-\alpha_2\sin(y_i-\beta x_i))^{\sum_i} \tag{2.24}$$

Maka, fungsi log-likelihood untuk model (2.24) adalah:

$$Log\ L=-n\ln 2\pi+\frac{n}{2}\ln(1-{\alpha_1}^2-{\alpha_2}^2)-\sum_i\ln(1-\alpha_1\cos(y_i-\beta x_i)-\alpha_2\sin(y_i-\beta x_i)) \tag{2.25}$$

Penaksir kemungkinan maksimum dari α_1 dan α_2 diperoleh dengan menurunkan fungsi log-likelihood pada Persamaan (2.25) untuk masing-masing α_1 dan α_2 dan menyamakan dengan nol sebagai berikut:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha_1} = -\frac{n\,\alpha_1}{(1-\alpha_1{}^2-\alpha_2{}^2)} + \sum_i \frac{\cos(y_i-\beta x_i)}{(1-\alpha_1\cos(y_i-\beta x_i)-\alpha_2\sin(y_i-\beta x_i))} = 0 \qquad (2.26)$$

dan

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha_2} = -\frac{n\,\alpha_2}{(1-\alpha_1{}^2-\alpha_2{}^2)} + \sum_i \frac{\cos(y_i-\beta x_i)}{(1-\alpha_1\cos(y_i-\beta x_i)-\alpha_2\sin(y_i-\beta x_i))} = 0 \qquad (2.27)$$

Dari Persamaan (2.26) dan (2.27) diperoleh:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{c^2}{n}\sum_i w_i \cos(y_i - \beta x_i), \qquad (2.28)$$

dan

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{c^2}{n}\sum_i w_i \sin(y_i - \beta x_i) \qquad (2.29)$$

dimana $w_i = (1 - \alpha_1 \cos(y_i - \beta x_i) - \alpha_2 \sin(y_i - \beta x_i))^{-1}$ (2.30)

Penaksir kemungkinan maksimum dari parameter *slope* β juga diperoleh setelah menyamakan turunan parsial dari log L terhadap β dengan nol.

$$\frac{\partial L(\alpha_1,\alpha_2,\beta;x,y)}{\partial \beta} = \sum_i w_i[\alpha_1 x_i \sin(y_i - \beta x_i) - \alpha_2 x_i \cos(y_i - \beta x_i)] = 0 \qquad (2.31)$$

Persamaan (2.31) dapat diselesaikan secara iterasi dengan memberikan beberapa inisialisasi nilai awal. Untuk nilai inisialisasi $\beta^{[0]}$ didapat

$$(y_i - \beta x_i) = \left(y_i - \beta^{[0]} x_i\right) + x_i\left(\beta^{[0]} - \beta\right) = \left(y_i - \beta^{[0]} x_i\right) + \Delta x_i,$$

dimana $\Delta = (\beta^{[0]} - \beta)$. Karena

$$\sin(y_i - \beta x_i) = \sin\left(y_i - \beta^{[0]} x_i\right)\cos \Delta x_i + \cos\left(y_i - \beta^{[0]} x_i\right)\sin \Delta x_i, \qquad (2.32)$$

dan

$$\cos(y_i - \beta x_i) = \cos\left(y_i - \beta^{[0]} x_i\right)\cos \Delta x_i - \sin\left(y_i - \beta^{[0]} x_i\right)\sin \Delta x_i, \qquad (2.33)$$

Untuk Δ kecil: $\cos \Delta x_i \approx 1$ dan $\sin \Delta x_i \approx \Delta x_i$

Jadi, Persamaan (2.32) dan (2.33) menjadi

$$\sin(y_i - \beta x_i) = \sin\left(y_i - \beta^{[0]} x_i\right) + \cos\left(y_i - \beta^{[0]} x_i\right) \Delta x_i, \tag{2.34}$$

dan

$$\cos(y_i - \beta x_i) = \cos\left(y_i - \beta^{[0]} x_i\right) - \sin\left(y_i - \beta^{[0]} x_i\right) \Delta x_i, \tag{2.35}$$

masing-masing, dengan mengganti Persamaan (2.34) dan (2.35) pada Persamaan (2.31), kemudian meningkatkan penaksir dari $\hat{\beta}^{[0]}$ menjadi

$$\hat{\beta}^{[1]} \cong \hat{\beta}^{[0]} + \frac{\sum_i x_i(\alpha_1 \sin(y_i - \beta^{[0]} x_i) - \alpha_2 \cos(y_i - \beta^{[0]} x_i))}{\sum_i x_i^2(\alpha_1 \cos(y_i - \beta^{[0]} x_i) + \alpha_2 \sin(y_i - \beta^{[0]} x_i))}. \tag{2.36}$$

Algoritma iterasi *re-weighting* untuk penaksiran kemungkinan maksimum diperoleh langkah demi langkah sebagai berikut:

a. Inisialisasi ${\alpha_1}^{[0]}, {\alpha_2}^{[0]}$ dan $\beta^{[0]}$ dengan ${\alpha_1}^{[0]} + {\alpha_2}^{[0]} < 1$ dan $\beta^{[0]}$ diambil dari koefisien regresi β dari regresi linier sederhana.

b. Pada iterasi ke $(k-1)$ diperoleh ${\alpha_1}^{[k-1]}, {\alpha_2}^{[k-1]}$, dan $\beta^{[k-1]}$, pada iterasi k hitung ${\alpha_1}^{[k]}, {\alpha_2}^{[k]}$, dan $\beta^{[k]}$ menggunakan Persamaan (2.28), (2.29), dan (2.36).

c. Ulangi langkah (b) sampai nilai ${\alpha_1}^{[k]}, {\alpha_2}^{[k]}$, dan $\beta^{[k]}$ hampir sama dengan nilai ${\alpha_1}^{[k-1]}, {\alpha_2}^{[k-1]}$, dan $\beta^{[k-1]}$.

d. Hitung nilai $\hat{\alpha}$ dengan menggunakan Persamaan (2.37) sebagai berikut:

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\hat{\alpha}_2 / \hat{\alpha}_1\right), & jika\ \hat{\alpha}_1 > 0, \hat{\alpha}_2 > 0, \\ \tan^{-1}\left(\hat{\alpha}_2 / \hat{\alpha}_1\right) + \pi, & jika\ \hat{\alpha}_1 < 0, \\ \tan^{-1}\left(\hat{\alpha}_2 / \hat{\alpha}_1\right) + 2\pi, & jika\ \hat{\alpha}_1 > 0, \hat{\alpha}_2 < 0, \\ tidak\ terdefinisi, & jika\ \hat{\alpha}_1 = 0, \hat{\alpha}_2 = 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

e. Hitung nilai penaksir dari parameter konsentrasi ρ dengan menggunakan Persamaan (2.38) sebagai berikut:

$$\hat{\rho} = \frac{1-\sqrt{1-\hat{\alpha}_1{}^2-\hat{\alpha}_2{}^2}}{\sqrt{\hat{\alpha}_1{}^2+\hat{\alpha}_2{}^2}}. \tag{2.38}$$

Secara simulasi, penaksir α dan β akan tak bias dan menghasilkan *mean square error* mendekati nol pada saat ukuran sampel ≥ 100 dan parameter konsentrasi ρ diatas 0,8 (Abuzaid dan Allahham, 2015).

2.7 Ragam Asimptotik dari Penaksir Parameter Regresi Sirkular Sederhana

Karena sulitnya memperoleh ragam sampling dari parameter, maka pendekatan ragam dari penaksir parameter diperoleh berdasarkan ekpektasi dari turunan parsial kedua dari model fungsi log likelihood dengan menggunakan metode *bootstrapping* (Efron, 1979 dalam Abuzaid dan Allahham, 2015). Langkah-langkah dari metode *boostrapping* untuk memperoleh ragam dari penaksir parameter dapat dirangkum sebagai berikut:

Terdapat n buah pasang pengamatan sirkular $(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$ dari dua peubah sirkular X dan Y yang mempunyai hubungan linier, kemudian ikuti langkah-langkah sebagai berikut:

a. *Resampling*

Pilih m pasang dari sampel secara acak, dimana $(m < n)$.

b. Penaksir Parameter *Bootstrap*

Penaksir dari α, β dan ρ diperoleh seperti yang digambarkan dalam sub bab 2.6 untuk pasangan terpilih dalam langkah (a) dan berturut-turut diberi tanda $\hat{\alpha}_{(1)}, \hat{\beta}_{(1)}$ dan $\hat{\rho}_{(1)}$.

c. Pengulangan

Ulangi langkah (a) dan (b), B kali yaitu $\hat{\alpha}_{(1)}, \ldots, \hat{\alpha}_{(B)}, \hat{\beta}_{(1)}, \ldots, \hat{\beta}_{(B)}$ dan $\hat{\rho}_{(1)}, \ldots, \hat{\rho}_{(B)}$.

d. Menaksir Ragam Parameter

Memperoleh ragam dari setiap penaksiran parameter, yakni $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ dan $\hat{\rho}$, dengan menggunakan Persamaan (2.39 a), (2.39 b) dan (2.39 c) sebagai berikut:

$$ragam(\hat{\alpha}) = \frac{1}{B-1}\sum_{j=1}^{B}(\hat{\alpha}_j - \bar{\alpha})^2 \quad (2.39\ a)$$

$$ragam(\hat{\beta}) = \frac{1}{B-1}\sum_{j=1}^{B}(\hat{\beta}_j - \bar{\beta})^2 \quad (2.39\ b)$$

$$ragam(\hat{\rho}) = \frac{1}{B-1}\sum_{j=1}^{B}(\hat{\rho}_j - \bar{\rho})^2 \quad (2.39\ c)$$

dimana $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ dan $\bar{\rho}$ merupakan rata-rata sampel dari masing-masing penaksir parameter untuk $j = 1, \dots, B$.

2.8 Selang Kepercayaan Regresi Sirkular Sederhana

Metode yang digunakan untuk membuat selang kepercayaan $100(1-\gamma)\%$ yakni metode *bootstrap-p* atau “persentil”. Metode ini merupakan metode yang paling banyak digunakan dan metode yang paling mudah dalam pendekatan selang kepercayaan. Selang kepercayaan $100(1-\gamma)\%$ *bootstrap-p* untuk penaksir parameter diperoleh dengan mengikuti tiga langkah awal yang telah disebutkan dalam sub bab 2.7, dan kemudian diakhiri dengan mengikuti langkah sebagai berikut:

d. Selang Kepercayaan

Susun penaksir *bootstrap* untuk setiap *resampling* dari yang terkecil ke yang terbesar, kemudian hitung selang kepercayaan $100(1-\gamma)\%$ masing-masing penaksir parameter menggunakan metode *bootstrap*-p sebagai berikut:

$$A_\alpha \le \hat{\alpha} \le B_\alpha \quad (2.40\ a)$$

$$A_\beta \le \hat{\beta} \le B_\beta \quad (2.40\ b)$$

$$A_\rho \le \hat{\rho} \le B_\rho \quad (2.40\ c)$$

dimana:

A_α = $\hat{\alpha}$ urutan ke- $B \times (\frac{\gamma}{2})$ $\quad$ B_α = $\hat{\alpha}$ urutan ke- $B(1 - \frac{\gamma}{2}) + 1$

A_β = $\hat{\beta}$ urutan ke- $B \times (\frac{\gamma}{2})$ $\quad$ B_β = $\hat{\beta}$ urutan ke- $B(1 - \frac{\gamma}{2}) + 1$

A_ρ = $\hat{\rho}$ urutan ke- $B \times (\frac{\gamma}{2})$ $\quad$ B_ρ = $\hat{\rho}$ urutan ke- $B(1 - \frac{\gamma}{2}) + 1$