

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendahuluan

Dalam penulisan materi pokok dari skripsi ini diperlukan beberapa teori-teori yang mendukung, yang menjadi uraian pokok pada bab ini. Uraian dimulai dengan membahas analisis deret waktu, diagram kontrol Shewhart, *Average Run Length* (ARL), diagram kontrol CUSUM, dan diagram kontrol CUSUM untuk proses dengan model AR(1).

2.2 Analisis Deret Waktu

Deret waktu (*time series*) adalah serangkaian data pengamatan yang diukur berdasarkan kurun waktu tertentu dengan interval waktu yang sama, dimana data pengamatan tersebut bersifat acak dan saling berhubungan. Tujuannya adalah untuk menggambarkan perkembangan suatu kegiatan dari waktu ke waktu. (Cryer dan Chan, 2008).

Analisis deret waktu pada dasarnya digunakan untuk melakukan analisis data yang mempertimbangkan pengaruh waktu (Cryer dan Chan, 2008). Analisis deret waktu dilakukan untuk memperoleh pola gerakan deret waktu dengan menggunakan nilai masa lalu, yang selanjutnya akan dijadikan sebagai dasar untuk pembuatan keputusan saat ini, peramalan keadaan masa yang akan datang, dan perencanaan kegiatan masa depan. Analisis deret waktu dapat dilakukan untuk menganalisis satu variabel (*univariate*) dan banyak variabel (*multivariate*) (Wei, 2006).

2.2.1 Stasioneritas

Stasioneritas berarti bahwa tidak terjadinya perubahan yang signifikan pada data dari waktu ke waktu. Fluktuasi data berada di sekitar suatu nilai rata-rata yang konstan, tidak tergantung pada waktu, dan varians dari fluktuasi tersebut tetap konstan sepanjang waktu (Makridakis dkk, 1998). Data deret waktu dikatakan stasioner jika rata-rata dan variansnya konstan, tidak ada unsur *trend* dan tidak ada unsur musiman dalam data (Cryer dan Chan, 2008).

Untuk menelaah kestasioneran data, dapat dilakukan dengan analisis grafik, yaitu dengan membuat plot dimana sumbu datar adalah waktu dan sumbu tegak adalah nilai dari data. Jika plot data untuk setiap periode waktu meningkat atau menurun dan membentuk suatu *trend*, maka data tersebut non stasioner (Yanti, 2010).

2.2.2 Fungsi Autokorelasi (ACF) dan Fungsi Autokorelasi Parsial (PACF)

Autokorelasi merupakan korelasi yang terjadi antara anggota-anggota dari serangkaian pengamatan yang tersusun dalam rangkaian waktu (Gujarati, 2003).

Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n merupakan sampel dari data deret waktu, maka langkah untuk mendapatkan autokorelasi sampel lag ke- p menurut Yanti (2010) adalah sebagai berikut:

1. Tentukan rata-rata sampel $\bar{x} = \frac{\sum_{t=1}^n x_t}{n}$

2. Tentukan autokovarians sampel lag ke- p , $s_p = \frac{\sum_{t=1}^{n-p} (x_t - \bar{x})(x_{t+p} - \bar{x})}{n - p}$

3. Tentukan autokorelasi sampel lag- p , $r_p = \frac{s_p}{s_0}$

Sedangkan langkah untuk mendapatkan autokorelasi parsial sampel lag ke- p adalah:

1. Bangun model regresi linier tanpa konstanta dengan x_{t+k} sebagai variabel tak

bebas, dan x_{t+p-1} , x_{t+p-2} , ..., x_t sebagai variabel bebas. $x_{t+p} =$

$$\phi_{p_1} x_{t+p-1} + \phi_{p_2} x_{t+p-2} + \dots + \phi_{p_k} x_t + e_{t+p}$$

dimana: ϕ_{p_i} merupakan parameter model, $i=1,2,\dots,p$, dan e_{t+p} merupakan

kekeliruan yang diasumsikan berdistribusi normal identik independen dengan

rata-rata 0, varians konstan σ^2 , dan tidak berkorelasi dengan x_{t+p-i}

2. Kalikan x_{t+p-i} dengan persamaan regresi

$\gamma_i = \phi_{p_1} \gamma_{i-1} + \phi_{p_2} \gamma_{i-2} + \dots + \phi_{p_k} \gamma_{i-p}$ untuk setiap $i=1,2,\dots,p$ dan hitung nilai

ekspektasinya, yang hasilnya akan membangun sebuah sistem persamaan

linier $\rho_i = \phi_{p_1} \rho_{i-1} + \phi_{p_2} \rho_{i-2} + \dots + \phi_{p_k} \rho_{i-p}$, $i=1,2,\dots,p$. Dengan menggunakan

metode Cramer, maka akan diperoleh:

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\phi_{pp} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & \cdot & \rho_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-2} & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \dots & \rho_{p-3} & \rho_{p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Sehingga, jika ρ_i ditaksir oleh $\hat{\rho}_i = r_i$ (autokorelasi sampel), maka ϕ_{ii} ditaksir oleh $\hat{\phi}_{ii} = \hat{\rho}_{ii} = r_{ii}$ (autokorelasi parsial sampel), $i=1,2,\dots,p$

2.2.3 Proses *white noise*

Suatu proses (ε_t) disebut *white noise* jika merupakan barisan variabel acak yang tidak berkorelasi, dengan $E(\varepsilon_t) = 0$, dan $V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ (Wei, 2006).

Hipotesis pengujian *white noise*:

H_0 : Residu memenuhi proses *white noise*

H_1 : Residu tidak memenuhi proses *white noise*

Statistik uji yang digunakan yaitu uji Ljung Box-Pierce. Rumus uji Ljung-Box atau Box-Pierce (Wei, 2006):

$$Q = n(n+2) \sum_{p=1}^p \frac{r_p^2}{n-j} \quad \dots(2.1)$$

dengan n = banyaknya observasi, p =banyaknya lag yang diuji, dan r_p =nilai koefisien autokorelasi pada *lag-p*.

Kriteria Uji: Tolak H_0 jika $Q > \chi^2_{(\alpha; k-j)}$, dimana nilai j merupakan banyaknya parameter, untuk model AR (1), $j=1$.

2.2.4 Uji normalitas residu

Uji normalitas residu dilakukan untuk mengetahui apakah residu berdistribusi normal atau tidak. Pengujian dapat dilakukan dengan analisis grafik normal probability plot. Jika residu berada disekitar garis diagonal, maka dapat dikatakan bahwa residunya berdistribusi normal.

2.2.5 Model *Autoregression* (AR)

Model AR merupakan model hasil regresi dengan dirinya sendiri pada waktu-waktu sebelumnya, artinya model AR merupakan model yang menggambarkan

bahwa suatu variabel dipengaruhi oleh variabel itu sendiri pada periode-periode sebelumnya (Wei, 2006). Orde dari model AR ditentukan oleh jumlah periode variabel yang masuk dalam model. Banyaknya nilai masa lalu yang digunakan oleh model, yaitu sebanyak j . Dalam menentukan tingkat model ini, jika hanya digunakan satu *lag* variabel, maka model ini dinamakan model AR orde pertama atau AR (1).

Misalkan X_t merupakan pengamatan pada waktu ke- t , $t=1,2,3,\dots,m$ yang membentuk model AR (1). Maka model AR (1) didefinisikan sebagai berikut:

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \dots(2.2)$$

dimana, c = parameter konstanta

ϕ = parameter koefisien arah (*slope*), pada proses stasioner : $|\phi| < 1$

ε_t = white noise, dimana $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Ekspektasi dan Varians dari X_t berturut-turut adalah sebagai berikut:

$$E(X_t) = \frac{c}{(1-\phi)} \quad \dots(2.3)$$

$$Var(X_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi^2)} \quad \dots(2.4)$$

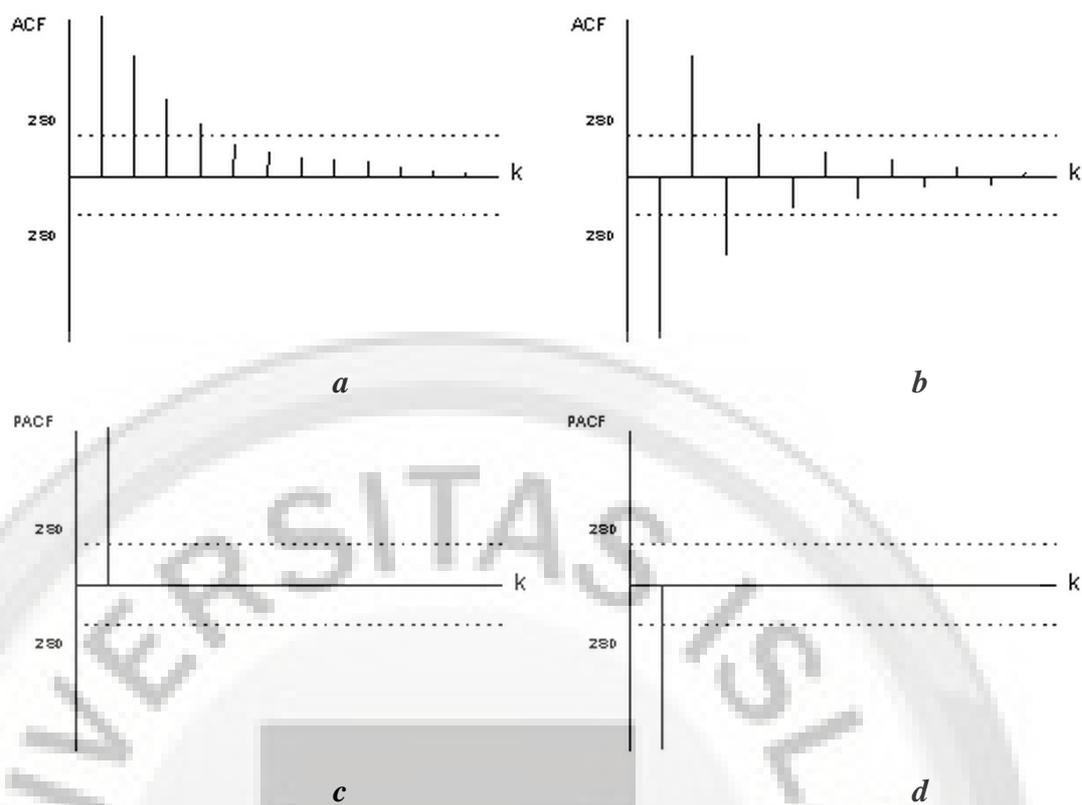
Pembuktian Persamaan (2.3) dan (2.4) ada pada Lampiran 1

2.2.6 Proses analisis untuk data deret waktu dengan model AR(1)

Pada bagian ini akan dijelaskan proses analisis untuk data deret waktu yang dibatasi hanya untuk model AR (1).

a. Identifikasi model

Dalam metode deret waktu, alat utama untuk mengidentifikasi model dari data yang akan diramalkan adalah dengan menggunakan ACF dan PACF. Model deret waktu dapat diidentifikasi dari karakteristik plot ACF dan PACF nya. plot ACF dan PACF untuk model AR(1) disajikan pada Gambar 2.1



Gambar 2.1 (a) Plot ACF AR(1) untuk ϕ positif, (b) Plot ACF AR(1) untuk ϕ negatif, (c) Plot PACF AR(1) untuk ϕ positif, (d) Plot PACF AR(1) untuk ϕ negatif

b. Menaksir parameter model

Setelah mengidentifikasi model sementara, langkah selanjutnya adalah mencari penaksir terbaik untuk parameter-parameter pada model tersebut. Model AR (1) pada Persamaan (2.2), dapat ditulis sebagai berikut:

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

Untuk menaksir parameter μ dan ϕ diperoleh dengan metode penaksir kuadrat terkecil, dengan formula sebagai berikut:

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad \dots(2.5)$$

$$\hat{\phi} = r_1 = \frac{\sum_{t=2}^m (X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X})}{\sum_{t=2}^m (X_{t-1} - \bar{X})^2} \quad \dots(2.6)$$

Pembuktian Persamaan (2.5) dan (2.6) ada pada Lampiran 2.

c. Pengujian Signifikansi Parameter

Setelah berhasil menaksir parameter model, maka langkah selanjutnya adalah melakukan pengujian signifikansi dari parameter yang sudah ditaksir. Sebuah model ramalan disebut cocok dan baik, jika taksiran parameternya signifikan (Yanti, 2010). Prosedur uji signifikansi parameter model pada parameter AR (1) adalah sebagai berikut:

1. Hipotesis:

$H_0: \phi = 0$, parameter ϕ tidak signifikan

$H_1: \phi \neq 0$, parameter ϕ signifikan

2. Statistik uji: $t_{hitung} = \frac{\hat{\phi}}{SE(\hat{\phi})}$

3. Kriteria uji: tolak H_0 jika $|t_{hitung}| > t_{\frac{\alpha}{2}; T-j}$, dimana T adalah banyaknya data dan j adalah banyaknya parameter dalam model.

d. Uji kesesuaian model AR

Langkah selanjutnya yaitu uji kesesuaian model AR. Uji kesesuaian model ini digunakan untuk membuktikan bahwa model sementara yang telah ditetapkan cukup memadai, dengan menggunakan analisis residu untuk memenuhi asumsi kenormalan model. Uji kenormalan residu dilakukan dengan uji *Kolmogorov-Smirnov* dengan Hipotesis sebagai berikut:

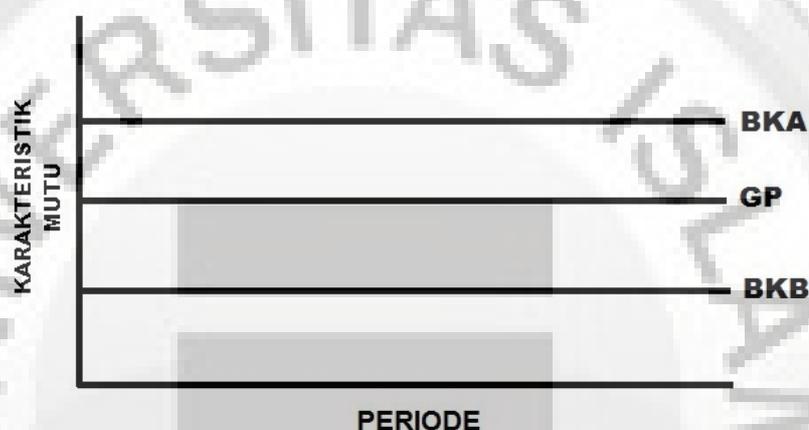
H_0 : Sampel berasal dari populasi berdistribusi normal

H_1 : Sampel tidak berasal dari populasi berdistribusi normal

Selain melakukan uji kenormalan, dilakukan uji *white noise* untuk memenuhi asumsi tidak ada autokorelasi residual, dengan menggunakan statistik uji Ljung-Box, dengan rumus seperti pada Persamaan (2.1).

2.3 Diagram Kontrol Shewhart

Diagram kontrol Shewhart merupakan diagram yang dibuat pada sistem kartesius dengan sumbu datar menyatakan periode dan sumbu tegak menyatakan karakteristik mutu. Sejajar dengan sumbu datar digambarkan pula Garis Pusat (GP), sepasang batas-batas kontrol, masing-masing berada di atas atau Batas Kontrol Atas (BKA) dan di bawah garis pusat atau Batas Kontrol Bawah (BKB), seperti pada Gambar 2.2 berikut:



Gambar 2.2
Diagram Kontrol Shewhart

Nilai karakteristik mutu diplotkan pada diagram yang menjelaskan keadaan proses (Handayani, 2012). Misalkan karakteristik mutu dinotasikan dengan X , dimana X merupakan variabel acak yang berdistribusi Normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2 . Secara umum BKA, GP, dan BKB untuk melukiskan diagram kontrol Shewhart rata-rata dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{BKA} = E(X) + k\sqrt{\text{Var}(X)}$$

$$\text{GP} = E(X)$$

$$\text{BKB} = E(X) - k\sqrt{\text{Var}(X)}$$

atau

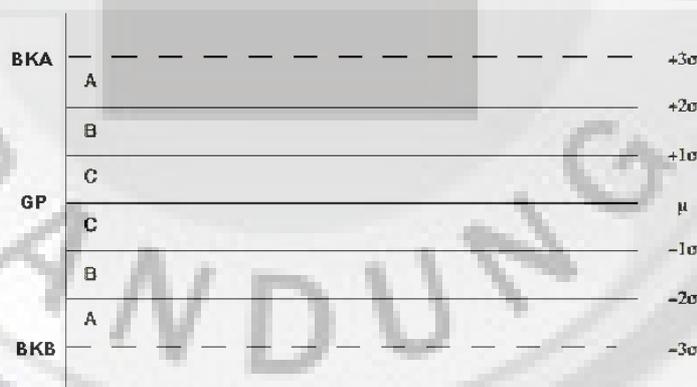
$$BKA = \mu + k\sigma$$

$$GP = \mu$$

$$BKB = \mu - k\sigma$$

dengan k merupakan konstanta yang menentukan besarnya probabilitas menyatakan proses *out of control* padahal proses *in control*. Umumnya nilai $k=3$, bersesuaian dengan $\alpha = 0.0027$.

Batas-batas pengendali ini dipilih sedemikian sehingga apabila proses terkendali, hampir semua titik-titik sampel akan jatuh di antara kedua garis itu. Meskipun semua titik-titik terletak di dalam batas kendali, belum tentu proses tersebut terkendali. Untuk menentukan kriteria tidak terkendali ini, diagram kontrol dibagi menjadi 3 zona yang diukur dalam satuan simpangan baku (σ) antara garis tengah dengan batas kontrol sebagai berikut:



Gambar 2.3
Pembagian zona diagram kontrol 3σ

Menurut Kiemele dkk (2000) ada 7 gejala-gejala diagram kontrol dikatakan tidak terkendali, yaitu:

1. Terdapat 1 atau lebih titik yang berada di luar batas kendali
2. 7 titik berturut-turut berada di sisi yang sama dari garis tengah

3. 7 titik berturut-turut membentuk tren meningkat atau menurun
4. 2 dari 3 titik secara berturut-turut jatuh di zona A atau lebih, di sisi yang sama dari garis tengah
5. 4 dari 5 titik secara berturut-turut jatuh di zona B atau lebih, di sisi yang sama dari garis tengah
6. 14 titik berturut-turut naik dan turun secara bergantian
7. 14 titik berturut-turut jatuh di zona C

Jika diagram kontrol proses tidak menunjukkan ketujuh gejala diatas, atau membentuk pola tidak acak lainnya, kita dapat mengatakan bahwa proses terkendali. Diagram kontrol ini baik digunakan untuk pergeseran diatas 1.5σ . Kemampuan untuk mendeteksi pergeseran yang kecil atau kurang dari 1.5σ , dapat di lakukan dengan menggunakan diagram kontrol yang menyertakan informasi dari sampel sebelumnya. Salah satu nya adalah diagram kontrol *Cumulative Sum* (Koshti, 2011).

2.4 *Average Run Length (ARL)*

Kriteria yang digunakan untuk dapat membandingkan kinerja diagram kontrol adalah dengan mengukur seberapa cepat diagram kontrol tersebut membangkitkan sinyal *out of control*. Diagram kontrol yang lebih cepat mendeteksi sinyal *out of control* disebut lebih sensitif terhadap perubahan proses. Salah satu cara untuk mengukur kinerja diagram kontrol adalah dengan menggunakan *Average Run Length (ARL)*. ARL adalah rata-rata *run* (observasi) yang harus dilakukan sampai ditemukannya *out of control* yang pertama (Handayani, 2012). Apabila proses dalam keadaan *in control* maka digunakan notasi ARL_0 . Dengan demikian ARL_0 akan bernilai besar dan ARL_1 akan bernilai kecil ketika proses dalam keadaan *out of control*. Secara umum persamaan untuk perhitungan nilai ARL adalah:

$ARL = \frac{1}{p}$, dengan p = probabilitas suatu titik keluar dari batas-batas bagan kontrol.

Untuk ARL_0 , $p=\alpha$ = probabilitas kesalahan/error tipe I (menyatakan keadaan tidak terkontrol padahal keadaan terkontrol) atau probabilitas suatu titik rata-rata sampel jatuh dari luar batas kontrol pada saat proses terkontrol, α disebut juga sebagai probabilitas *false alarm*, sedangkan untuk ARL_1 nilai $p=1-\beta$ =probabilitas kesalahan/error tipe II (menyatakan keadaan terkontrol padahal keadaan tidak terkontrol) atau probabilitas suatu titik rata-rata sampel jatuh di dalam batas kontrol pada saat proses tidak terkontrol. Secara umum performa baik dari sebuah diagram kontrol jika mempunyai ARL_0 sebesar mungkin dan ARL_1 sekecil mungkin.

2.5 Diagram Kontrol *Cumulative Sum* (CUSUM)

Diagram kontrol CUSUM pertama kali diteliti oleh Page pada tahun 1954 (Montgomery, 2009). Diagram kontrol CUSUM lebih efisien digunakan untuk mendeteksi pergeseran kecil pada rata-rata atau varians dalam proses, yang disebabkan adanya penyebab khusus. Grafik ini menghimpun secara langsung semua informasi di dalam barisan nilai-nilai sampel dengan menggambarkan jumlah kumulatif deviasi nilai sampel dari nilai target. Ada dua cara untuk merepresentasikan CUSUM, yaitu tabular CUSUM dan V-mask CUSUM. Dalam penelitian ini hanya akan dibahas mengenai representasi CUSUM dalam bentuk tabular CUSUM untuk pergeseran pada rata-rata.

2.5.1 Diagram kontrol CUSUM tabular untuk rata-rata

Misalkan X_t adalah variabel acak proses yang berdistribusi Normal, dengan rata-rata ketika proses *in control* μ_0 , rata-rata ketika proses *out of control* μ_A , dan varians σ^2 . Untuk mengontrol μ_0 , diambil sampel x_1, x_2, \dots, x_m yang dikumpulkan

selama m periode. Parameter μ_0 akan dikontrol oleh statistik CUSUM yang di definisikan sebagai berikut:

$$C_t = \sum_{j=1}^t (x_j - \mu_0) \quad , i=1,2,\dots,m$$

Kemudian didefinisikan statistik C_t^+ dan C_t^- sebagai berikut: (Koshti, 2011)

$$C_t^+ = \max[0, x_t - (\mu_0 + K) + C_{t-1}^+] \quad \dots (2.7)$$

$$C_t^- = \max[0, (\mu_0 - K) - x_t + C_{t-1}^-] \quad \dots (2.8)$$

dimana $C_0^+ = C_0^- = 0$

Selanjutnya C_t^+ dan C_t^- disebut nilai satu ujung atas dan batas bawah CUSUM.

Dalam hal ini K merupakan nilai referensi, dimana $K=k\sigma$. Nilai $k = \frac{\delta}{2}$, dengan δ

merupakan besar pergeseran yang akan kita kontrol, dan jika pergeseran dinyatakan

dalam bentuk standar deviasi, maka: $K = \frac{\delta}{2} \sigma = \frac{|\mu_A - \mu_0|}{2}$

Jika salah satu dari C_t^+ atau $C_t^- > H$, maka proses dikatakan *out of control*. Dalam

hal ini, Montgomery (2009) merekomendasikan nilai H sebesar 5σ atau 5 kali dari

nilai standar deviasi prosesnya. Maka, batas-batas kontrol CUSUM tabular untuk

fase II adalah:

$$\text{BKA} = H$$

$$\text{BKB} = 0$$

Untuk fase I, dimana parameter tidak diketahui, parameter ditaksir dengan

penaksir tak biasnya. Penaksir tak bias bagi μ adalah: $\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j$, dan penaksir tak

bias bagi σ adalah $\frac{\overline{MR}}{d_2}$

dimana

$$\overline{MR} = \frac{1}{m-1} \sum_{j=2}^m MR_j, MR_j = |X_j - X_{j-1}|, j = 2, 3, \dots \text{ dan } d_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \pi = 3,14 \quad \dots (2.9)$$

Maka batas atas dan bawah diagram kontrol CUSUM tabular untuk fase I adalah:

$$C_t^+ = \max[0, x_t - (\bar{x} + K) + C_{t-1}^+] \quad \dots(2.10)$$

$$C_t^- = \max[0, (\bar{x} - K) - x_t + C_{t-1}^-] \quad \dots(2.11)$$

dimana $C_0^+ = C_0^- = 0$, dan $K = \frac{\delta}{2} \left(\frac{\overline{MR}}{d_2} \right) = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_0|}{2}$

Maka, batas kontrol CUSUM tabular untuk fase I adalah:

$$\text{BKA} = H$$

$$\text{BKB} = 0$$

Secara ringkas, langkah- langkah dari diagram kontrol CUSUM tabular adalah sebagai berikut: (Suwanda, 2013)

1. Hitung C^+ dan C^- , dimana $C_0^+ = C_0^- = 0$
2. Tentukan nilai referensi $K=k\sigma$, dan nilai kritis $H=h\sigma$. Dimana k dan h ditentukan sedemikian sehingga ARL_0 sesuai dengan yang diinginkan. Biasanya $k=1/2$ dan $h= 4$ atau 5
3. Tentukan bilangan yang menjelaskan nomor kumulatif z^- pada saat dimulainya $C_i^- > 0$ dan z^+ pada saat $C_i^+ > 0$
4. Andaikan bahwa pada periode ke- t terjadi *out of control*, yaitu C^+ atau $C^- > H$ dan pada saat itu $z^- = z$ atau $z^+ = z$
5. Hitung $T = t - z$ bilangan ini mengandung makna bahwa perkiraan pergeseran terjadi pada periode T dan $T+1$

2.5.2 ARL diagram kontrol CUSUM

Untuk diagram kontrol CUSUM ini, Montgomery (2009) merekomendasikan perkiraan nilai ARL yang diberikan oleh Siegmund (1985) karena kemudahannya. Untuk CUSUM satu ujung dengan parameter h dan k , dimana h dipilih 4-5 dan $k = 0.5$ maka Siegmund memperkirakan ARL nya sebagai berikut:

$$ARL = \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2}$$

Untuk CUSUM satu ujung atas (C_i^+), $\Delta = \delta^* - k$ dan untuk CUSUM satu ujung bawah (C_i^-), $\Delta = -\delta^* - k$ dengan $\delta^* = \frac{|\mu_A - \mu_0|}{\sigma}$ dan $b = h + 1.166$

Sedangkan untuk ARL CUSUM dua ujung, Siegmund memperkirakan ARL nya sebagai berikut: $\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL^+} + \frac{1}{ARL^-}$

Hasil perhitungan ARL CUSUM dua ujung dengan pendekatan Siegmund untuk $k=1/2$ dan $h=4, 4.37235$, dan 5 disajikan pada Tabel 2.1

Tabel 2.1 ARL CUSUM Dua Ujung dengan $k=1/2$ dan $h=4, 4.37235$, dan 5

Shift	$h=4$	$h=4.37235$	$h=5$
0.00	169	247.72	469.11
0.25	74.43	94.841	139.78
0.50	26.69	30.673	38.02
0.75	13.27	14.654	17.03
1.00	8.343	9.0845	10.336
1.50	4.666	5.0384	5.666
2.00	3.222	3.47	3.8884
2.50	2.458	2.6442	2.958
3.00	1.986	2.1353	2.3864
4.00	1.435	1.5416	1.7209

2.5.3 Pengaruh adanya autokorelasi terhadap performa diagram kontrol CUSUM

Untuk melihat pengaruh autokorelasi terhadap performa diagram kontrol CUSUM, akan dibandingkan simpangan baku untuk proses yang saling bebas dan proses yang berautokorelasi. Varians dari X_t telah ditentukan pada Persamaan (2.4). Andaikan $\sigma_\varepsilon^2 = 1$, nilai-nilai simpangan baku X_t untuk berbagai nilai ϕ tersebut disajikan pada Tabel 2.2

Tabel 2.2 Simpangan Baku X_t untuk $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ dan Berbagai Nilai ϕ

ϕ	$\sigma_{x_t}^2$	σ_{x_t}
-0.9	5.26	2.29
-0.6	1.56	1.25
-0.3	1.10	1.05
0	1	1
0.3	1.10	1.05
0.6	1.56	1.25
0.9	5.26	2.29

Jika tidak terjadi autokorelasi, simpangan baku $X_t = \sigma_{x_t} = 1$. Jika ada autokorelasi, ketika ($|\phi|$) membesar maka σ_{x_t} akan membesar juga. Untuk melihat pengaruh autokorelasi terhadap ARL diagram kontrol CUSUM tradisional, dihitung nilai ARL dengan berbagai ϕ . Tabel 2.3 menunjukkan hasil perhitungan ARL ketika terjadi autokorelasi yang dihitung dengan menggunakan ARL diagram kontrol CUSUM tradisional.

Tabel 2.3 ARL Diagram Kontrol CUSUM Ketika Berautokorelasi untuk σ_{x_t}
Diketahui yang Dihitung dengan Diagram Kontrol CUSUM Tradisional

Shift	ϕ				
	-0.6	-0.3	0	0.3	0.6
0	247.72	247.72	247.72	247.72	247.72
0.25	123.34	100.95	94.84	100.95	123.34
0.5	45.82	33.51	30.67	33.51	45.82
0.75	21.89	15.97	14.65	15.97	21.89
1	13.11	9.82	9.08	9.82	13.11
1.5	6.89	5.38	5.04	5.38	6.89
2	4.62	3.69	3.47	3.69	4.62
2.5	3.47	2.80	2.64	2.80	3.47
3	2.78	2.26	2.14	2.26	2.78
4	1.98	1.63	1.54	1.63	1.98

Tabel diatas menunjukkan adanya perubahan nilai ARL diagram kontrol CUSUM tradisional jika terjadi autokorelasi. Ketika ($|\phi|$) membesar maka ARL nya akan membesar juga.

Dalam hal simpangan baku tidak diketahui, simpangan baku ditaksir oleh penaksir tak biasnya, yaitu $\frac{\overline{MR}}{d_2}$, dengan \overline{MR} dan d_2 seperti yang dijelaskan pada

Persamaan (2.9). Ketika terjadi autokorelasi, $E\left(\frac{\overline{MR}}{d_2}\right) = \sigma_\varepsilon \sqrt{1-\phi}$. Dengan

demikian, $\frac{\overline{MR}}{d_2}$ merupakan penaksir bias dari σ_{x_t} . Tabel 2.4 berikut akan

menunjukkan besarnya $E\left(\frac{\overline{MR}}{d_2}\right)$, untuk $\sigma_\varepsilon = 1$

Tabel 2.4 Nilai $E\left(\frac{\overline{MR}}{d_2}\right)$ untuk berbagai nilai ϕ

ϕ	$\sigma_{x_t}^2$	$\sqrt{\sigma_{x_t}^2}$	$E\left(\frac{\overline{MR}}{d_2}\right) = \sigma_\varepsilon \sqrt{(1-\phi)}$
-0.9	5.26	2.29	3.16
-0.6	1.56	1.25	1.58
-0.3	1.10	1.05	1.20
0	1	1	1
0.3	1.10	1.05	0.88
0.6	1.56	1.25	0.79
0.9	5.26	2.29	0.73

Dari tabel diatas, dapat dilihat jika simpangan baku tidak diketahui, maka $E\left(\frac{\overline{MR}}{d_2}\right)$ akan semakin meningkat jika ϕ mendekati -1 dan akan mengecil jika ϕ mendekati 1. Tabel 2.5 menunjukkan hasil perhitungan ARL ketika terjadi autokorelasi yang dihitung dengan menggunakan ARL diagram kontrol CUSUM tradisional, dan nilai $h=4.3$

Tabel 2.5 ARL Diagram Kontrol CUSUM Ketika Berautokorelasi untuk σ_{x_t} Tidak Diketahui yang Dihitung dengan Diagram Kontrol CUSUM Tradisional

Shift	ϕ				
	-0.6	-0.3	0	0.3	0.6
0	247.72	247.72	247.72	247.72	247.72
0.25	152.87	118.06	94.84	79.52	30.67
0.5	67.61	42.64	30.67	24.20	19.86
0.75	33.71	20.32	14.65	11.77	9.87
1	30.67	12.23	9.08	7.47	6.38
1.5	9.87	6.50	5.04	4.25	3.70
2	6.38	4.38	3.47	2.97	2.60
2.5	4.69	3.30	2.64	2.27	2.01
3	3.70	2.64	2.14	1.84	1.63
4	2.60	1.89	1.54	1.34	1.19

Tabel diatas menunjukkan adanya perubahan nilai ARL diagram kontrol CUSUM tradisional jika terjadi autokorelasi. Jika dipaksakan menggunakan diagram

kontrol CUSUM tradisional, maka akibatnya ARL_1 akan membesar ketika $\phi < 0$ dan akan mengecil ketika $\phi > 0$. Oleh karena itu, perlu adanya modifikasi terhadap diagram kontrol CUSUM tradisional jika terjadi autokorelasi.

2.6 Diagram Kontrol CUSUM untuk Proses dengan Model AR(1)

Diagram kontrol CUSUM untuk proses dengan model AR(1) akan dibuat berdasarkan rasio fungsi kemungkinan dibawah proses *in control* ($\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = \mu_0$) dan dibawah proses *out of control* ($\mu_j = \mu_{j+1} = \dots = \mu_m = \mu_A$) pada *change point* tertentu, seperti yg dikemukakan oleh Timmer dkk (1998). Berdasarkan rasio kemungkinan tersebut, nilai satu ujung atas CUSUM pada Persamaan (2.7) menjadi:

$$U_t = \max[0, U_{t-1} + (w_t - m_{wt}) - K'_t \sigma_{wt}] \quad \dots (2.12)$$

dan nilai satu ujung bawah pada Persamaan (2.8) menjadi:

$$L_t = \min[0, L_{t-1} + (w_t - m_{wt}) - K'_t \sigma_{wt}] \quad \dots (2.13)$$

dimana: $\sigma_{wt} = \begin{cases} \sqrt{[(1+\phi)/(1-\phi)]\sigma_\varepsilon}, t=1 \\ \sigma_\varepsilon, t > 1 \end{cases}$

$$w_t = \begin{cases} (1+\phi)X_1, t=1 \\ X_t - \phi X_{t-1}, t > 1 \end{cases}$$

$$K'_t = \begin{cases} [(1+\phi)/(1-\phi)]k, t > 1 \\ k, t=1 \end{cases}$$

$$k = \frac{\mu_0 + \mu_A}{2}$$

$$\text{dan } m_{wt} = \begin{cases} [(1+\phi)/(1-\phi)]\mu_0, t=1 \\ \mu_0, t > 1 \end{cases}$$

pembuktian lihat Lampiran 3.

dengan $U_0 = u$ untuk $u \in [0, h\sigma_{w_1})$, dan $L_0 = l$ untuk $l \in [-h\sigma_{w_1}, 0)$

Maka, batas kontrol diagram kendali CUSUM fase II untuk Persamaan (2.12) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{BKA} &= h\sigma_{w_1} \\ \text{BKB} &= 0 \end{aligned} \quad \dots(2.14)$$

dan untuk Persamaan (2.13) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{BKA} &= 0 \\ \text{BKB} &= -h\sigma_{w_1} \end{aligned} \quad \dots(2.15)$$

Untuk fase I, nilai ujung atas CUSUM pada Persamaan (2.10) menjadi:

$$U_t = \max\left[0, U_{t-1} + (\hat{w}_t - \hat{m}_{w_1}) - \hat{K}'_t \frac{\overline{MR}}{d_2}\right] \quad \dots (2.16)$$

dan nilai ujung bawah CUSUM pada Persamaan (2.11) menjadi:

$$L_t = \min\left[0, L_{t-1} + (\hat{w}_t - \hat{m}_{w_1}) - \hat{K}'_t \frac{\overline{MR}}{d_2}\right] \quad \dots (2.17)$$

$$\text{dengan } \overline{MR} = \frac{1}{t-1} \sum_{j=1}^{t-1} MR_j$$

$$d_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\hat{w}_t = \begin{cases} (1 + \hat{\phi})X_1, t = 1 \\ X_t - \hat{\phi}X_{t-1}, t > 1 \end{cases}$$

$$\hat{K}'_t = \begin{cases} [(1 + \hat{\phi})/(1 - \hat{\phi})]k, t > 1 \\ k, t = 1 \end{cases}, \quad k = \frac{\mu_0 + \mu_A}{2}$$

$$\hat{m}_{w_1} = \begin{cases} [(1 + \hat{\phi})/(1 - \hat{\phi})]\hat{\mu}_0, t = 1 \\ \hat{\mu}_0, t > 1 \end{cases}$$

dimana $U_0 = u$ untuk $u \in [0, h\sigma_{w_1})$, dan $L_0 = l$ untuk $l \in [-h\sigma_{w_1}, 0)$

Dengan demikian, batas kontrol diagram kendali CUSUM fase I ujung atas adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{BKA} &= h \frac{\overline{MR}}{d_2} \\ \text{BKB} &= 0 \end{aligned} \quad \dots (2.18)$$

dan untuk persamaan (2.17) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{BKA} &= 0 \\ \text{BKB} &= h \frac{\overline{MR}}{d_2} \end{aligned} \quad \dots (2.19)$$

2.6.1 ARL Diagram Kontrol CUSUM AR(1)

ARL CUSUM dua ujung dengan pendekatan Siegmund tidak bisa digunakan untuk proses yang berautokorelasi. Oleh sebab itu, perlu adanya modifikasi terhadap ARL CUSUM biasa jika terjadi autokorelasi. Timmer dkk (1998) telah menghitung ARL CUSUM dua ujung untuk model AR(1) menggunakan metode markov chain dengan menggunakan $k=0.5$, $h=4.3$, dan $\sigma_\varepsilon = 1$. Hasil perhitungan ARL dua ujung untuk diagram kontrol CUSUM dengan model AR(1) di sajikan pada Tabel 2.6 berikut:

Tabel 2.6 ARL CUSUM Dua Ujung dengan Model AR(1)

Shift	ϕ								
	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8
0	247.72	247.72	247.72	247.72	247.72	247.72	247.72	247.72	247.72
0.25	41.55	67.66	82.94	90.96	93.41	90.79	82.50	66.54	4.38
0.50	11.83	19.56	25.14	28.43	29.43	28.12	24.35	17.49	1.12
0.75	6.48	9.74	12.08	13.44	13.79	13.04	11.06	7.25	1.00
1.00	4.59	6.43	7.68	8.37	8.47	7.91	6.53	3.88	1.00
1.25	3.64	4.87	5.66	6.05	6.04	5.56	4.46	2.15	1.00
1.50	3.08	3.98	4.53	4.77	4.70	4.26	3.32	1.64	1.00
1.75	2.71	3.41	3.81	3.97	3.87	3.45	2.62	1.24	1.00
2.00	2.45	3.01	3.32	3.42	3.30	2.91	2.15	1.06	1.00
2.25	2.25	2.72	2.96	3.02	2.89	2.51	1.81	1.01	1.00
2.50	2.10	2.49	2.69	2.72	2.58	2.22	1.56	1.00	1.00
2.75	2.00	2.32	2.48	2.49	2.34	2.00	1.36	1.00	1.00
3.00	1.93	2.18	2.31	2.30	2.15	1.82	1.21	1.00	1.00
3.25	1.88	2.07	2.17	2.15	2.00	1.67	1.11	1.00	1.00
3.50	1.84	1.98	2.06	2.03	1.88	1.53	1.05	1.00	1.00
3.75	1.79	1.92	1.97	1.94	1.78	1.41	1.02	1.00	1.00
4.00	1.74	1.87	1.90	1.85	1.68	1.30	1.01	1.00	1.00

Sumber: Timmer dkk (1998)

Tampak bahwa pada *shift* (pergeseran) rata-rata sebesar 0.25 dan $\phi = 0.6$, nilai ARL *out of control* yang sebenarnya adalah $ARL_1 = 66.54$, sedangkan menurut CUSUM tradisional $ARL_1 = 30.67$, jadi diagram kontrol CUSUM tradisional *under estimate* ARL_1 pada $\phi > 0$ dan *over estimate* ARL_1 pada $\phi < 0$.