BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendahuluan

Dalam bab ini akan dibahas tentang uji *t* untuk menguji sebuah parameter rata-rata dan selisih dua parameter rata-rata dua sampel berpasangan dibawah asumsi populasi berdistribusi normal. Pada sebuah pengujian vektor rata-rata atau selisih dua vektor rata-rata dua sampel berpasangan akan menggunakan statistik uji T^2-*Hotelling*. Untuk itu, sebelumnya akan disinggung tentang beberapa distribusi variabel acak univariat, distribusi sampling, dalil limit pusat dan distribusi normal multivariat.

Berikutnya akan dibahas tentang uji nonparametrik untuk kasus satu sampel dan dua sampel berpasangan yaitu uji tanda dan uji rank bertanda Wilcoxon. Sebagai bahasan pokok adalah akan dikemukakan uji tanda dan uji rank bertanda wilcoxon multivariat satu sampel dan dua sampel berpasangan.

Uji tanda berlaku untuk skala pengukuran minimal ordinal, sedangkan uji rank bertanda Wilcoxon berlaku untuk skala pengukuran minimal interval. Oleh karena itu sebagai bahasan pertama dikemukanan tentang skala pengukuran.

2.2 Skala Pengukuran

Seorang peneliti yang menganalisis data numerik biasanya berkaitan dengan skala yang digunakan untuk pengukuran, banyak peneliti mengikuti defenisi pengukuran yang dikemukakan oleh Stevens. Stevens mendefenisiskan pengukuran sebagai pemberian angka terhadap benda atau peristiwa menurut aturan tertentu dan menunjukan bahwaaturanyang berbeda menjadikan skala serta pengukuran yang berbeda pula. Ada

repository.unisba.ac.id

empat macam skala pengukuran, yaitu: nominal, ordinal, interval dan rasio (Daniel, 1989).

1. Skala Nominal

Skala ini merupakan skala yang paling lemah diantara keempat skala pengukuran. Skala nominal hanya berfungsi sebagai lambang untuk membedakan benda dengan peristiwa yang satu dengan yang lainnya berdasarkan nama (predikat). Jadi kita dapat mengklasifikasikan (menyebut) sesuatu barang yang dihasilkan pada suatu proses dengan dua predikat cacat atau tidak cacat. Biasanya pengklasifikasian menggunakan angka sesuai dengan yang diinginkan oleh peneliti, untuk membedakan benda dengan peristiwa berdasarkan karakteristik tertentu.

2. Skala Ordinal

Skala pengukuran ordinal digunakan untuk membedakan benda atau peristiwa yang satu dengan yang lain berdasarkan beberapa karakteristik tertentu yang dimiliki.

Selain untuk membedakan skala ordinal juga berfungsi untuk mengurutkan kategori berdasarkan pangkat atau peringkatnya masing-masing. Tenaga penjuala misalnya, bisa diperingkat dari yang paling buruk sampai yang paling baik. Misalnya jika ingin membedakan dan membuat peringkat pada *n* buah benda berdasarkan suatu ciri tertentu, dapat menetapkan nomor 1 untuk benda yang ciri tertentunya paling kurang (buruk), nomor 2 untuk benda yang ciri tertentunya kedua paling kurang dan seterusnya hingga nomor *n*untuk benda dengan kadar ciri tertentu yang paling tinggi. Urutan data seperti ini disebut data peringkat *(rank data)*.

repository.unisba.ac.id

3. Skala Interval

Apabila benda atau peristiwa yang amati dapat dibedakan antara yang satu dan lainnya kemudian diurutkan, dan jika perbedaan-perbedaan antara peringkat yang satu dengan yang lainnya mempunyai arti (bila satuan pengukurannya tetap), disini skala interval dapat diterapkan. Skala interval memiliki sebuah titik nol, tetapi titik nol ini bisa secara sembarang atau bukan merupakan titik mutlak.

4. Skala Rasio

Apabila pengukuran yang dilakukan memiliki sifat-sifat yang terdapat pada ketiga skala yang pertama serta sifat tambahan bahwa rasio antara masing-masing pengukuran mempunyai arti, maka skala pengukuran ini disebut skala rasio. Pengukuran dengan skala rasio merupakan skala pengukuran yang paling tinggi.

Pada pengujian statistik parametrik diterapkan pengujian statistik jika skala pengukuran minimal berskala interval dan data berdistribusi normal. Tetapi apabila salah satu dari ketentuan tersebut tidak terpenuhi maka pengujian statistik parametrik tidak dapat diterapkan, sehingga diperlukan uji lain selain statistika parametrik yaitu statistik nonparametrik

2.3 Distribusi Variabel Acak

Secara umum distribusi variable acak dibagi menjadi dua, yaitu distribusi variabel acak kontinu dan distribusi variabel acak diskrit. Berikut ini akan dibahas beberapa distribusi kontinu diantaranya distribusi normal, normal baku*chi-square*, distribusi *t-student*, distribusi *F* dan distribusi diskrit seperti distribusi Bernoulli dan distribusi Poisson. Semuanya berdasarkan uraian Hogg dan Craig (1995).

repository.unisba.ac.id

2.3.1 Distribusi Normal

Distribusi dengan variabel acak kontinu yang pertama kali dibicarakan adalah distribusi normal atau sering pula disebut distribusi Gauss. Distribusi ini merupakan salah satu yang paling penting dan banyak digunakan.

Jika variabel acak X kontinu mempunyai fungsi densitas berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{2.1}$$

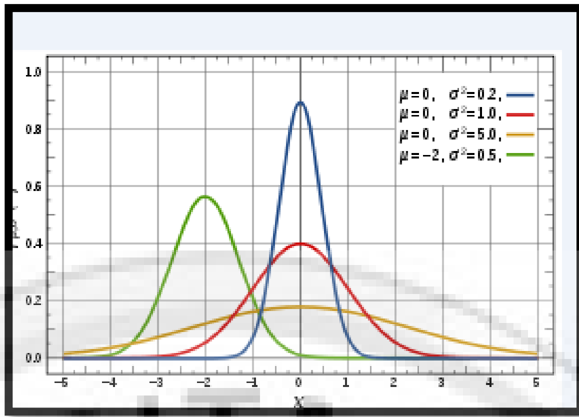
dimana nilai x dan μ mempunyai batas $-\infty \leq x \leq \infty$, $\sigma > 0$. Maka variabel acak X dikatakan berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2 atau ditulis $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Sifat-sifat penting dari distribusi normal yaitu:

a. Grafiknya selalu ada diatas sumbu datar X
b. Bentuknya simetrik terhadap $X = \mu$
c. Mempunyai satu modus, jadi kurva unimodal
d. Grafiknya mendekati (berasimtutkan) sumbu datar X dimulai dari $X = \mu + 3\sigma$ kekanan dan $X = \mu + 3\sigma$ kekiri.
e. Luas daerah grafik selalu sama dengan satu unit persegi.

Untuk tiap pasang μ dan σ, sifat-sifat diatas selalu dipenuhi, hanya bentuk kurvanya saja yang berlainan. Jika σ makin besar, kurvanya makin rendah (platikurtik) dan bentuk σ makin kecil, kurvanya makin tinggi (leptokurtik). Kurvanya disajikan sebegai berikut:

repository.unisba.ac.id



Gambar 2.1 Kurva Distribusi Normal

2.3.2 Distribusi Normal Baku

Distribusi normal standar atau normal baku adalah distribusi normal yang memiliki sifat khusus, yaitu distribusi dengan rata-rata (μ) = 0 dan simpangan baku (σ) = 1. Distribusi normal baku muncul sebagai solusi dari adanya masalah dalam penyusunan tabel distribusi normal.

Seluruh pengamatan dengan setiap peubah acak normal X dapat ditransformasikan menjadi himpunan pengamatan baru suatu peubah acak normal Z dengan rata-rata = 0 dan simpangan baku = 1. Hal ini dapat dikerjakan dengan transformasi sebagai berikut:

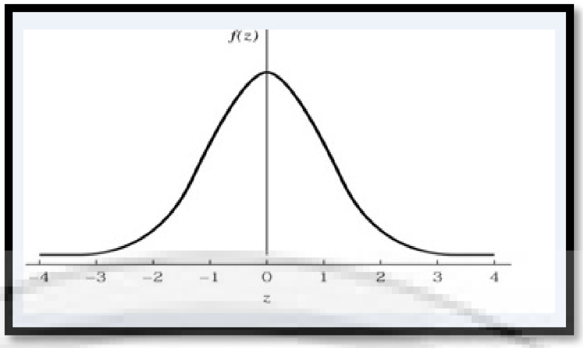
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Oleh karena itu fungsi densitas ditsribusi normal baku adalah:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, -\infty \leq z \leq \infty \qquad ...(2.2)$$

Bentuk transformasi di atas memetakan distribusi normal menjadi distribusi normal standard (baku), sebab distribusi normal dengan variabel Z ini memiliki nilai rata-rata = 0 dan simpangan baku = 1 dan kurvanya sebagai berikut:

repository.unisba.ac.id



Gambar 2.2 Kurva Ditribusi Normal Baku

2.3.3 Distribusi *Chi-Square*

Distribusi khi-kuadrat (*Chi-square distribution*) atau distribusi χ^2 merupakan distribusi dengan variabel acak kontinu.

Fungsi densitas dari distribusi *chi-square* sebagai berikut:

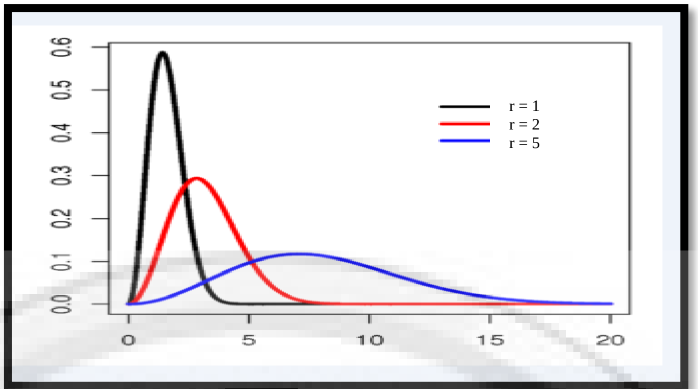
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-r/2} & ;0 < x < \infty, \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \qquad ...(2.3)$$

Rata-rata dan varians dari distribusi *chi-square* yaitu masing-masing adalah $\mu = E(X) = (r/2)2 = r$ dan $\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = (r/2)2^2 = 2r$ dimana parameter r adalah derajat kebebasan dari distribusi *chi-square*. Selanjutnya ditulis dengan notasi $X \sim \chi_r^2$.

Distribusi *chi-square* umumnya merupakan kurva positif, yaitu miring kekanan. Kemiringan ini makin berkurang. Kemiringan ini makin berkurang jika derajat kebebasan r makin besar. Kurva distribusinya sebagai berikut:

UNIVERSITAS ISLAM BANDUNG

repository.unisba.ac.id



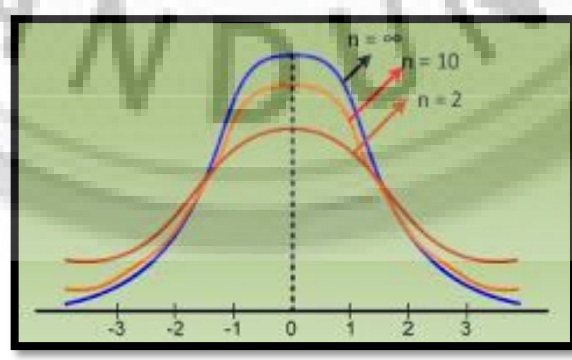
Gambar 2.3 Kurva Distribusi *Chi-Square*

2.3.4 Distribusi *t-student*

Distribusi dengan variabel kontinu lainnya, selain dari distribusi normal adalah distribusi *student* atau distribusi *t*. Fungsi densitasnya adalah:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{r}\right)^{\frac{(r+1)}{2}} \qquad ...(2.4)$$

Berlaku untuk nilai x yang memenuhi $-\infty < X < \infty$. Rata-rata dan variansnya masing-masing adalah adalah $\mu = E(X) = 0$ $\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = \frac{r}{r-2}$. Ditulis dengan notasi $X \sim t_r$ dimana kurvanya sebagai berikut:



Gambar 2.4 Kurva Distribusi *t-student*

repository.unisba.ac.id

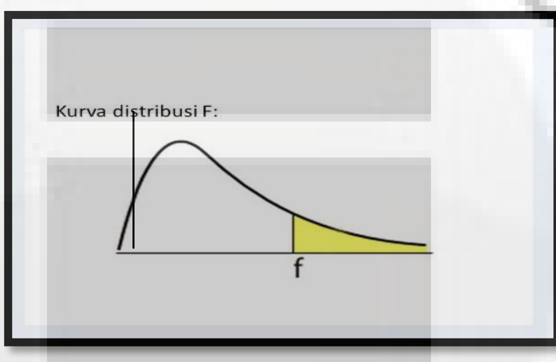
2.3.5 Distribusi *F*

Fungsi densitas dari variable acak *X* yang berdistribusi *F* adalah:

$$f(x) = \frac{\Gamma[(r_1 + r_2)/2](r_1/r_2)^{r_1/2}}{\Gamma(r_1/2)\Gamma(r_2/2)} \frac{(x)^{\frac{r-2}{2}}}{(1 + r_1 x / r2)^{(r_1+r_2)/2}} \quad ...(2.5)$$

dimana $0 < x < \infty$, $\mu = E(X) = \frac{r_2}{r_2 - 2}$ dan $\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = \frac{2r_2^2(r_1 + r_2 - 2)}{r1(r_2 - 2)^2(r_2 - 4)}$

Ditulis dengan notasi $X \sim F_{r_1,r_2}$ dimna r_1 = derajat bebas pembilang, dan r_2 = derajat bebas penyebut. Kurvanya dapat sebagai berikut:



Gambar 2.5 Kurva Distribusi *F*

2.3.6 Distribusi Bernoulli

Dalam distribusi Bernoulli hanya mempunyai dua kemungkinan kejadian yaitu sukses dan gagal, dimana probabilitas terjadi sukses *p*. Dan fungsi probabilitasnya adalah:

$$f(x) = p^x (1 - p)^{1-x} \quad ; x = 0,1 \quad ...(2.6)$$

Nilai rata-ratanya yaitu: $\mu = E(X) = p$

dan variansnya: $\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = p(1 - p)$

repository.unisba.ac.id

2.3.7 Distribusi Poisson

Fungsi probabilitas dari variableacak yang berdistribusi poisson adalah:

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \text{ dimana } x = 1, 2, \ldots \qquad \ldots(2.7)$$

dimana $\lambda > 0$ maka $f(x) \geq 0$

Rata-rata dan varians dari distribusi poisson sama yaitu $E(X) = \mathrm{var}(X) = \lambda$.

2.4 Distribusi Sampling

Yang dimaksud dengan distribusi sampling adalah distribusi dari variabel acak yang merupakan fungsi dari sampel acak. Sampel acak bisa berasal dari distribusi kontinu ataudistribusi diskrit. Untuk sampel acak kontinu akan dibahas distribusi rata-rata daripopulasi normal sedangkan untuk distribusi diskrit dibahas distribusi dari jumlah Bernoulli. Semuanya bersumber dari uraian Hogg dan Craig (1995).

2.4.1 Distribusi Rata-rata

Misalkan terdapat sampel acak berukuran *n*, X_1, X_2, ..., X_n yang berasal dari distribusi $N(\mu, \sigma^2)$. Rata-rata sampel adalah $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ dan varians sampel $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X)^2$. Dapat dikatakan bahwa $\bar{X}$ berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varians $\frac{\sigma^2}{n}$, atau $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ serta $\bar{X}$ dan S^2 saling bebas.

repository.unisba.ac.id

2.4.2 Distribusi Binomial

Distribusi Binomial merupakan perluasan dari distribusi Bernoulli dimana *X* merupakan variabel acak yang menyatakan banyaknya sukses pada *n* buah percobaan Bernoulli, nilai-nilai yang mungkin dari *X* adalah 0,1,...,*n*. Fungsi probabilitas *X* pada *x* adalah:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x} \;;\; x = 1,2,...,n \qquad ...(2.8)$$

dimana: $\binom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$

Rata-rata distribusi binomial $\mu = \text{var}(X) = np$ dan variansnya adalah $\sigma^2 = \text{var}(X) = np(1-p)$.

Dalam hal *n* cukup besar dan *p* cukup kecil $\lambda = np$ konstan, *X* akan mendekati distribusi poisson dengan fungsi densitas seperti pada Persamaan (2.7). Sedangkan untuk *n* besar dan *p* cukup besar serta $\mu = np$ dan $\sigma^2 = np\,(1-p)$ konstan, variabel acak *X*akan mendekati distribusi normal dengan fungsi densitas seperti pada Persamaan (2.1).

2.4.3 Dalil Limit Pusat

Misalkan X_1, X_2, ..., X_n merupakan sampel acak yang berdistribusi sembarang yang tidak diketahui dengan rata-rata μ dan varians σ^2. Kemudian definisikan statsitsik yang berbentuk:

$$U_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \qquad ...(2.9)$$

repository.unisba.ac.id

Dapat ditunjukan bahwa untuk n menuju tak berhingga, U_n berdistribusi N (0,1) atau berdistribusi normal baku.

2.5 Distribusi Normal Multivariat

Apabila vektor acak $\boldsymbol{X}$ mempunyai distribusi normal p-variat (multivariat) dengan vektor rata- rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$ definit positif, maka fungsi densitas dari X diberikan oleh:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p |\Sigma|^{1/2}} e^{-(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)/2} \qquad ...(2.10)$$

dimana:

$$\mu^t = [\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p], \; \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}.$$

$E\;X_i = \mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p$, merupakan ekspektasi dari X_i

$\sigma_{ij} = E\;X_i - \mu_i \quad X_j - \mu_j \;, \quad i = j = 1, 2, \ldots, p$, merupakan kovarians dari X_i, X_j

Selanjutnya ditulis dengan notasi $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$.

2.6 Pengujian Hipotesis

2.6.1 Beberapa Istilah

1. **Pengertian Hipotesis**

Hipotesis dapat didefinisikan sebagai pernyataan mengenai sesuatu yang akan dibuktikan kebenaranya melalui penelitian. Sedangkan hipotesis statistik adalah pernyatan mengenai

repository.unisba.ac.id

a. Harga atau nilai sebuah atau beberapa parameter variabel acak tertentu, yang masih harus diuji secara empirik, apakah pernyataan itu dapat diterima atau sebaliknya ditolak.
b. Bentuk distribusi sebuah atau beberapa variabel acak masih harus diuji secara empirik, apakah pernyataan itu dapat diterima atau sebaliknya ditolak.

2. Bentuk Hipotesis Statistik

Hipotesis statistik selalu dinyatakan dalam sebuah pasangan, antara hipotesis nol yang diberi lambang H_0 dan hipotesis alternatif yang lambangnya H_1.

Misalnya ingin menguji kesamaan parameter rata-rata μ dari dua distribusi, rumusan hipotesisnya adalah:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 &: \mu_1 \neq \mu_2 \end{aligned} \qquad \text{...(2.11)}$$

Disini hipotesis nol menyatakan bahwa rata-rata kedua populasi itu sama, sedangkan hipotesis tandingannya menyatakan bahwa rata-rata populasi keduanya tidak sama. Bentuk hipotesis seperti pada Persamaan (2.11) disebut hipotesis sederhana.

3. Taraf Siginifikansi

Yang dimaksud dengan taraf siginifikansi atau αadalah probabilitas menolak hipotesis nol (H_0) yang harusnya diterima. Biasanya (dalam praktik) α yang diambil 0,01 atau 0,05.

repository.unisba.ac.id

4. Kuasa Uji

Kuasa uji hipotesis adalah probabilitas untuk menolak hipotesis nol apabila hipotesis nolsalah. Kuasa uji dapat didefenisikan sebagai 1-β, dengan β adalah probabilitas menerima hipotesis nol yang harusya ditolak. Keputusan untuk menerima hipotesis nol yang salah disebut kesalahan tipe II, dan menolak hipotesis nol yang benar adalah kesalahan tipe I yang biasanya dinyatakan dengan α. Dalam praktik untuk nilai β tidak ditetapkan seperti nilai α. Tetapi berperan dalam menentukan ukuran sampel minimal.

2.6.2 Pengujian Satu Parameter (Univariat)

Untuk kasus normal pengujian rata-rata dapat menggunakan uji t dan uji z. Dimana pengujiannya dapat dijelaskan seperti dibawah ini:

1. Uji Z

Andaikan sebuah sampel acak X_1, X_2, ..., X_n yang diambil dari populasi yang berdistrubsi normal dengan parameter rata-rata μ dan varians σ^2. Sampel tersebut akan digunakan untuk menguji hipotesis dengan rumusan:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 \end{aligned} \qquad ...(2.12)$$

Statistik uji yang digunakan jika σ diketahui adalah:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad ...(2.13)$$

dimana: $\overline{X}$: rata-rata sampel

μ : rata-rata populasi

σ : simpangan baku populasi

n : ukuran sampel

repository.unisba.ac.id

dibawah hipotesis nol benar $\mu = \mu_0$ dapat ditunjukan bahwa statistik uji Z pada Persamaan (2.13) berdisistribusi $N(0,1)$. Oleh karena itu, kriteria pengujian, tolak H_0 jika $|z| > z_{\alpha/2}$ dimana z adalah nilaidari Z, dan $z_{\alpha/2}$ diperoleh dari tabel distribusi normal baku (Lampiran 8) sehingga $P(Z > z_{\alpha/2}) = \int_{z_{\alpha/2}}^{\infty} f\ z\ dz = \alpha/2$ dengan $f(z)$ seperti pada Persamaan (2.1).

2. Uji *t*

Dalam hal σ tidak diketahui dapat menggunakan statistik uji untuk Persamaan (2.12):

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad \text{...(2.14)}$$

dimana $S^2 = \dfrac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ penaksir tak bias dari σ^2

Satistik uji pada Persamaan (2.14) di bawah H_0 benar merupakan variabel acak yang berdistribusi t-student dengan derajat bebas $r = n$-1. Oleh karena itu kriteria ujinya adalah tolak H_0 jika $|t| > t_r\ \alpha/2$, dimana t adalah nilai dari T, dan $t_r\ \alpha/2$ nilai yang diperoleh dari tabel distribusi t-student (Lampiran 9) sehingga $P\ T > t_r\ \alpha/2\ = \alpha/2$.

Untuk pengujian kesamaan parameter rata-rata dua sampel berpasangan. Statistik uji Z pad persamaan (2.13) dan t pada Persamaan (2.14) dapat digunakan dengan mengganti X_i oleh $D_i = X_i - Y_i$ dimana X_i adalah nilai variabel untuk sampel pertama individu ke-i dan Y_i nilai variabel untuk sampel kedua individu ke-i.

repository.unisba.ac.id

2.6.3 Pengujian Nonparametrik

Jika asumsi yang mendasari uji *Z* dan uji *t* (distribusi normal) tidak terpenuhi maka dapat menggunakan uji nonparametrik. Pada bagian ini akan dijelaskan dua buah prosedur nonparametrik yaitu uji tanda dan uji rank bertanda Wilcoxon (Gibbon dan Chakraborti, 2003).

1. Uji Tanda untuk Satu Sampel

Uji tanda merupakan prosedur tertua dari semua uji nonparamterik. Menurut uji statistik ini dinamakan uji tanda karena, seperti yang akan dianalisis, data untuk analisis diubah menjadi serangkaian tanda plus (+) dan minus (-). Dengan demikian, statistik uji yang digunakan adalah jumlah tanda plus atau jumlah tanda minus (Daniel, 1989).

Asumsi-asumsi

1. Sampel yang tersedia untuk analisis adalah sampel acak dari suatu populasi dengan median *M* yang belum diketahui nilainya.
2. Variabel yang diminati diukur sekurang-kurangnya dengan skala ordinal.
3. Variabel yang diminati kontinu. Semua nilai sampel yang berjumlah *n* berturut-turut diberi notasi $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Hipotesis:

$$\begin{aligned} &H_0 : M = M_0 \text{ atau } H_0 : p = P(X > M_0) = P(X < M_0) = 0{,}5 \\ &H_1 : M \neq M_0 \text{ atau } H_1 : p = P(X > M_0) \neq P(X < M_0) \end{aligned} \quad \text{...(2.15)}$$

Statistik Uji:

$$K = \text{banyaknya tanda positif dari } X_i - M_0 \quad \text{...(2.16)}$$

untuk $i = 1, 2, \ldots, n$

Di bawah H_0 benar $K \sim binomial\ (n, p = 0.5)$.

repository.unisba.ac.id

Kriteria Uji:

Tolak H_0 jika $k \geq k_{\alpha/2}$ atau $k \leq k'_{\alpha/2}$

Dimana k adalah nilai dari K, $k_{\alpha/2}$ dan $k'_{\alpha/2}$ masing-masing ditentukan sehingga

$$\sum_{i=k_{\alpha/2}}^{n} \binom{n}{i} (0,5)^n < \alpha/2 \text{ dan } \sum_{i=0}^{k'_{\alpha/2}} \binom{n}{i} (0,5)^n = \alpha/2 \qquad ...(2.17)$$

Nilai kritis $k_{\alpha/2}$ tersedia pada Tabel binomial pada Lampiran 6.

Uji satu pihak untuk pihak kanan dengan rumusan hipotesis:

$$H_0 : M \leq M_0 \text{ atau } H_0 : p = P(X \geq M_0) \leq 0.5 \qquad ...(2.18)$$

$$H_1 : M > M_0 \text{ atau } H_1 : p = P(X > M_0) > P(X < M_0)$$

Kriteria uji :

Daerah penolakan : $K \geq k_\alpha$

dimana, $\sum_{i=k_\alpha}^{n} \binom{n}{i} (0.5)^n = \alpha$.

Uji satu pihak untuk pihak kiri dengan rumusan hipotesis:

$$H_0 : M \geq M_0 \text{ atau } H_0 : p = P(X \leq M_0) \leq 0.5 \qquad ...(2.1\ 20$$

$$H_1 : M < M_0 \text{ atau } H_1 : p = P(X > M_0) < P(X < M_0) \text{ , komposit}$$

UNIVERSITAS ISLAM BANDUNG

repository.unisba.ac.id

Kriteria uji :

Daerah penolakan : $K \leq k'_{\alpha}$

dimana, $\sum_{i=1}^{k'_{\alpha}} \binom{n}{i} 0.5^{n} = \alpha$.

Penanganan Data Kembar

Yang dimaksud data kembar adalah data yang sama dengan median. Kejadian ini sangatlah kecil, karena populasi diasumsikan kontinu. Namun dalam praktik bisa saja data kembar ini terjadi karena ketelitian pengukuran. Jika terjadi data kembar, penanganannya biasanya data tersebut tidak dilibatkan dalam analisis, sehingga ukuran sampel berkurang. Alternatif lainnya antara lain:

1. Dengan setengahnya memberi tanda positif dan setengahnya memberi tanda negatif.
2. Menentukan tanda melalui pelemparan koin.
3. Memberikan tanda paling sedikit satu pada data kembar yang menyababkan H_0 ditolak yang disebut uji konservatif.

Aproksimasi Normal

Dalam hal ukuran sampel n> 12, pendekatan normal ke binomial dapat digunakan untuk menentukan daerah penolakan.

Tolak H_0 jika $K > k_{\alpha/2}$ atau $K \leq k'_{\alpha/2}$.

dalam hal ini $k_{\alpha/2} = 0{,}5n + 0{,}5 + 0{,}5\sqrt{n}\, z_{\alpha/2}$ ...(2.20)

dan $z_{\alpha/2}$ kuantil dari distribusi normal baku pada Lampiran 8 dengan $P(Z \geq z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$.

repository.unisba.ac.id

2. Uji Rank Bertanda Wilcoxon untuk Satu Sampel

Pada uji tanda hanya menggunakan tanda dari selisih antara nilai hasil pengamatan dan median hipotesis. Untuk pengujian $H_0 : M = M_0$ mempunyai sebuah uji statistik lain yang memperhitungkan besar selisih tersebut apabila ada. Untuk menggunakan uji statistik yang lain, dapat menggunakan *uji peringkat bertanda Wilcoxon*. Prosedur penggunaan peringkat bertanda wilcoxon ini mula-mula mengurutkan selisih menurut rank atau peringkat berdasakan nilai mutlaknya masing-masing. Kemudian diberi tanda pada selisih (beda) yang semula diberi peringkat dan setelah itu melakukan dua penjumlahan yaitu penjumlahan peringkat bertanda positif dan penjumlahan peringkat bertanda negatif. Karena uji peringkat bertanda wilcoxon menggunakan informasi lebih lebih baik daripada uji tanda, maka biasanya kuasa ujinya lebih tinggi dari uji tanda. uji rank bertanda Wilcoxon juga mengasumsikan sampel berasal dari populasi simetrik. Apabila sampel yang diambil memenuhi asumsi ini, maka kesimpulan mengenai median populasi tersebut berlaku juga untuk nilai rata-ratanya (rata-rata populasi).

Asumsi-asumsi

1. Sampel acak berukuran n dari berasal dari populasi dengan median M yang tidak diketahui nilainya.
2. Variabelnya kontinu.
3. Populasi yang diambil sampelnya simetrik.
4. Skala pengukuran yang digunakan sekurang-kurangnya skala interval.
5. Pengamatan-pengamatan yang dilakukan saling independen atau saling bebas.

repository.unisba.ac.id

Hipotesis:

$$H_0 : M = M_0$$
$$H_1 : M \neq M_0 \qquad \text{...(2.21)}$$

Statistik Uji:

$$W^+ = \sum_{i}^{n} B_i r\left(|\delta_i|\right) \qquad \text{...(2.22)}$$

Atau

$$W^- = \sum_{i}^{n} \left(1 - B_i\right) r\left(|\delta_i|\right)$$

dimana, $\delta_i = X_i - M_0$, $r\left(|\delta_i|\right)$ = ranking dari δ_i , dan

$$B_i = \begin{cases} 1, & \delta_i > 0 \\ 0, & \delta_i \leq 0 \end{cases}$$

Nilai probabilitas eksak dari *T*, ujung kiri maupun ujung kanan untuk $n \leq 15$ disajikan pada Lampiran 7.

Untuk $n > 15$, menggunakan dalil limit pusat, distribusi asimtot $4W^+$ adalah normal dengan ekspektasi dan varians, masing-masing:

$$E(4W^+) = n(n+1) \text{ dan } Var(4W^+) = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} \qquad \text{...(2.23)}$$

Oleh karena itu statistik uji dapat menggunakan :

$$Z = \frac{4W^+ - n(n+1)}{\sqrt{\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}}} \qquad \text{...(2.24)}$$

Kriteria Uji :

- $n \leq 15$, tolak H_0 jika $P(W > w) < \alpha / 2$, gunakan probabilitas sebelah kanan, dimana $w = maks(w^+, w^-)$.

- n > 15, tolak H_0 jika $|z| \geq z_{\alpha/2}$, z adalah nilai dari Z.

Penanganan Data Kembar

Yang dimaksud data kembar disini apabila terdapat nilai tanda mutlak $|\delta_i| = |\delta_j|$; $i \neq j$.

Untuk kasus ini gunakan rata-ratanya. Khusus untuk ukuran sampel besar, varians W^+ di bawah H_0 perlu dikoreksi. Misal banyaknya data kembar adalah s masing-masing sebanyak m_i, i =1,2,.. s. Varians W^+ di bawah H_0 menjadi:

$$\text{var}(W^+) = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{24} - \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i - m_i^2 - 1}{48} \qquad \text{...(2.25)}$$

2.6.4 Uji *T^2-Hotelling*

Dalam pengujian suatu vektor rata-rata untuk matriks kovarians diketahui, pertama-tama akan melihat kembali kasus univariat, dimana pengujian dilakukan pada sebuah variabel Xyang berdistribusi $N(\mu, \sigma^2)$. Hipotesis yang akan diuji adalah rata-rata μ sama dengan suatu nilai tertentu, katakan saja μ_0, melawan alternatif bahwa μ tidak sama dengan μ_0 seperti pada Persamaan (2.12).

Statistik uji jika σ^2 tidak menggunakan Persamaan (2.14) yang dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$T^2 = \left(\frac{(\bar{X} - \mu_0)}{S/\sqrt{n}} \right)^2 = n(\bar{X} - \mu_0)(S^2)^{-1}(\bar{X} - \mu_0) \qquad \text{...(2.26)}$$

Variabel T^2 merupakan jarak kuadrat dari rata-rata sampel $\bar{X}$ untuk menguji μ_0. Nilai $S/\sqrt{n}$ adalah standar deviasi dari $\bar{X}$, dimana $\bar{X}$ dan S^2 diperoleh dari hasil observasi.

repository.unisba.ac.id

Selanjutnya, andaikan terdapat vektor $\boldsymbol{\mu}_0$ berukuran *p x* 1 adalah nilai yang mungkin dari rata-rata berdistribusi normal multivariat, maka akan diuji:

$$\begin{aligned} H_0 &: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \\ H_1 &: \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0 \end{aligned} \qquad ...(2.27)$$

dengan menggunakan sampel acak berukuran *n*, statistik uji yang digunakan merupakan analogi dari Persamaan (2.26) yaitu:

$$T^2 = (\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^t \left(\frac{\mathbf{S}}{n}\right)^{-1} (\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) = n(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^t \mathbf{S}^{-1} (\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \qquad ...(2.28)$$

dimana

$\underset{(p\,x1)}{\overline{\mathbf{X}}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i$ vektor rata-rata sampel dan $\underset{(p\,x\,p)}{\mathbf{S}} = \frac{1}{n-1}\sum_{=1}^{n} (\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}})'$

matriks kovarians sampel.

Kriteria Uji

$T^2 \sim \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}$. Oleh karena itu tolak H_0 jika $t^2 > \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)$, t^2 adalah nilai dari T^2,dimana α merupakan taraf nyata dan nilai kritis $F_{p,n-p}(\alpha)$, diperoleh nilai kuantil *F* yang terdapat pada Lampiran 11.

Untuk *n* cukup besar, distribusi χ_p^2 akan mengaproksimasi ke distributi T^2-*Hotelling*. Oleh karena itu, kriteria pegujiannya adalah:

Tolak H_0 jika $t^2 > \chi_p^2(\alpha)$

repository.unisba.ac.id

Prosedur diatas berlaku juga untuk pengujian kesamaan dua vektor rata-rata sampel berpasangan dengan menggunakan vector acak selisih $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}$, rumusan hipotesis menjadi:

$$\begin{aligned} H_0 &: \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D}} = 0 \\ H_1 &: \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D}} \neq 0 \end{aligned} \qquad \text{...(2.29)}$$

Jika asumsi normalitas tidak terpenuhi atau terdapat *outlier*, uji T^2-*Hotelling* tidak baik digunakan atau kinerjanya berkurang. Salah satu alternatifnya dapat menggunakan analisis statistik nonparametrik, misalnya uji tanda dan uji rank bertanda multivariat yang akan dijelaskan berikut ini.

2.7 Uji Nonparametrik Multivariat

2.7.1 Uji Tanda Multivariat Satu Sampel

Perhitungan nilai statistik uji tanda multivariat prosedurnya diusulkan oleh Leach (1991) dalam Sheu dan Suzanne (1996) seperti yang akan dijelaskan berikut ini:

Andaikan $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ merupakan sampel acak berukuran *n* yang diambil dari populasi multivariat berdimensi *p* dengan parameter vektor median ***M***.

Rumusan Hipotesis :

$$\begin{aligned} H_0 &: \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 \\ H_1 &: \boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{M}_0 \end{aligned} \qquad \text{...(2.30)}$$

dimana : $\boldsymbol{M}^t = \; M_1 \;\; M_2 \;\; \ldots M_p$ dan $M_0^t = (M_{01} \;\; M_{02} \; \ldots \; M_{0p})$

repository.unisba.ac.id

Prosedur Penentuan Statistik Uji :

1. Tentukan nilai D_{ik} yaitu $D_{ik} = X_{ik} - M_{0i}$. i =1,2,…,n , k=1,2,…,p.

2. Tentukan tanda dari selisih D_{ik} antara lain:

$$\text{sgn}\,(D_{ik}) = \begin{cases} 1 & (D_{ik} > 0) \\ -1 & (D_{ik} < 0) \end{cases} \quad ...(2.31)$$

Jika terdapat data kembar atau $D_{ik} = 0$, maka pengamatan tersebut tidak dilibatkan dalam penelitian.

3. Hitung K_k^+ yaitu banyaknya tanda plus dan K_k^- adalah banyaknya tanda minus.

4. Hitung $U_k = 2K^+ - n$ untuk $k = 1,2,\ldots p$. Maka akan diperoleh $\boldsymbol{U}^t = U_1 \;\; U_2 \;\; \ldots \;\; U_p$ sebagai vektor acak yang berukuran p x 1. Distribusi limit (asimtot) dari $\dfrac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{n}}$ di bawah hipotesis nol adalah normal multivariat dengan rata-rata 0 dan matriks kovarians V. Elemen dari V ditaksir oleh:

$$\hat{v}_{kl} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \text{sgn}(D_{ik})\,\text{sgn}(D_{il}) \quad ...(2.32)$$

5. Tentukan statistik uji U^* yaitu:

$$U^* = \boldsymbol{U}^t (n\hat{v})^{-1}\boldsymbol{U} \quad ...(2.33)$$

Statistik uji pada Persamaan (2.33) berdistribusi asimtot *chi-square* dengan derajat bebas sama dengan banyaknya variabel (p).

6. Tolak H_0 jika $u^* > \chi^2_p\,(\alpha)$. Dimana u^* merupakan nilai dari U^*

repository.unisba.ac.id

2.7.2 Uji Rank Bertanda Wilcoxon Multivariat Satu Sampel

Untuk menentukan prosedur uji rank bertanda Wilcoxon, prosedurnya dapat dihitung sebagai berikut:

1. Hitung nilai D_{ik} yaitu $D_{ik} = X_{ij} - M_{i0}$.
2. Tentukan nilai mutlak D_{ik} atau $|D_{ik}| = |X_{ik} - M_{i0}|$.
3. Tetapkan peringkat R_{ik} untuk nilai mutlak dari D_{ik} yang terkecil sampai yang terbesar.
4. Didepan masing-masing peringkat, cantumkan tanda dari selisih yang nilainya menghasilkan peringkat yang bersangkutan atau dapat ditulis $R_{ik} \operatorname{sgn} D_{ik}$.
5. Hitung nilai statistik rank bertanda Wilcoxon untukmasing-masing variabel:

$$W_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_{ik} \operatorname{sgn}(D_{ik})}{n+1} \qquad ...(2.34)$$

dimana distribusi yang mendasari adalah simetrik. Untuk sampel berukuran besar, vectoracak $\frac{W}{\sqrt{n}}$ dibawah hipotesis nol adalah normal multivariat dengan rata-rata 0 dan matriks kovarians *V*. Dimana elemen dari *V* ditaksir oleh:

$$\hat{v}_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{R_{ik} \operatorname{sgn}(D_{ik})}{n+1} \frac{R_{il} \operatorname{sgn}(D_{il})}{n+1} \qquad ...(2.35)$$

6. Tentukan statistik uji W^* yaitu:

$$W^* = W^t (n\hat{v})^{-1} W \qquad ...(2.36)$$

   Statistik uji pada Persamaan (2.36) berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas sama dengan banyaknya variabel (*p*).

7. Tolak H_0 jika $w^* > \chi^2_p$ (α). Dimana w^* merupakan nilai dari W^*

repository.unisba.ac.id