BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Grafik dan Tinjauan Kualitatif Model Pertumbuhan Populasi Logistik dengan Faktor Pemanenan

Berdasarkan persamaan (2.22) diketahui bahwa bentuk umum dari model pertumbuhan populasi yang dipengaruhi pemanenan adalah sebagai berikut :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \varepsilon\left[qN(t)\left(\alpha - \beta\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}\right)\right]$$

Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \varepsilon qN(t)\alpha + \varepsilon qN(t)\beta\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \varepsilon qN(t)\alpha + \varepsilon q\beta\frac{dN(t)}{dt}$$

$$\frac{dN(t)}{dt} - \varepsilon q\beta\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \varepsilon qN(t)\alpha$$

$$\frac{dN(t)}{dt}(1 - \varepsilon q\beta) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \varepsilon qN(t)\alpha$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r}{1-\varepsilon q\beta}N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \frac{\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}N(t)$$

$$= \frac{r}{1-\varepsilon q\beta}N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \frac{\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}N(t)$$

$$= \frac{r}{1-\varepsilon q\beta}N(t) - \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}N^2(t) - \frac{\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}N(t)$$

$$= \frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}N(t) - \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}N^2(t) \tag{3.1}$$

Persamaan (3.1) memiliki bentuk fungsi kuadrat yang dapat digambarkan ke dalam sketsa grafik $\frac{dN}{dt}$ terhadap N dengan langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1 : Menentukan Diskriminan

Nilai diskriminan dapat diperoleh dengan menghitung $D = b^2 - 4ac$. Bentuk umum dari persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c$ sehingga berdasarkan persamaan (3.1) dapat diketahui nilai a, b dan c.

Jadi $D = \left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)^2 - 4\left(-\frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}\right)(0)$

$$= \left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)^2 > 0$$

Karena nilai diskriminannya adalah positif maka persamaan (3.1) akan memiliki akar akar yang berlainan akibatnya grafik fungsi akan memotong sumbu N.

Langkah 2 : Menentukan Perpotongan Grafik dengan Sumbu $\frac{dN}{dt}$

Perpotongan grafik dengan sumbu $\frac{dN}{dt}$ terjadi pada saat $N = 0$ maka diperoleh nilai sebagai berikut :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}(0) - \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}(0)$$

$$\frac{dN}{dt} = 0 \qquad (3.2)$$

Jadi titik potongnya adalah (0,0).

Langkah 3 : Menentukan Perpotongan Grafik dengan Sumbu N

Perpotongan grafik dengan sumbu N terjadi pada saat $\frac{dN}{dt} = 0$ maka diperoleh nilai sebagai berikut :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}N - \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}N^2 = 0 \qquad (3.3)$$

$$\frac{(r-\varepsilon q\alpha)NK-rN^2}{K(1-\varepsilon q\beta)}=0$$

$$(r-\varepsilon q\alpha)NK-rN^2=0$$

$$N[(r-\varepsilon q\alpha)K-rN]=0 \tag{3.4}$$

Dari persamaan (3.4) nilai N yang memenuhi ada dua kemungkinan, yaitu :

$N=0$ atau $(r-\varepsilon q\alpha)K-rN=0$

Kita sebut jika $N_1=N=0$ (3.5)

Jika $(r-\varepsilon q\alpha)K-rN=0$, maka :

$$rN=(r-\varepsilon q\alpha)K$$

$$N=\frac{(r-\varepsilon q\alpha)K}{r}$$

$$N=\left(1-\frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)K$$

Kita sebut $N_2=N=\left(1-\frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)K$ (3.6)

Jadi titik potongnya adalah (0,0) dan $\left(\left(1-\frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)K,0\right)$.

Langkah 4 : Menentukan Titik Balik

Titik balik diperoleh jika $\frac{\boldsymbol{d}\left[\frac{dN}{dt}\right]}{\boldsymbol{dN}}=0$ sebagai berikut :

Berdasarkan persamaan (3.1) diketahui bahwa :

$$\frac{dN}{dt}=\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}N-\frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}N^2$$

Maka diperoleh :

$$\frac{d\left[\frac{dN}{dt}\right]}{dN} = \frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta} - \frac{2r}{K(1-\varepsilon q\beta)}\mathrm{N} = 0 \tag{3.7}$$

$$\frac{2r}{K(1-\varepsilon q\beta)}N = \frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}$$

$$N = \frac{(r-\varepsilon q\alpha)\,K(1-\varepsilon q\beta)}{2r\,(1-\varepsilon q\beta)}$$

$$N = \frac{K\,(r-\varepsilon q\alpha)}{2r} \tag{3.8}$$

Substitusikan persamaan (3.8) ke (3.1)

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\left[\frac{K}{2}\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{r}\right)\right] - \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}\left[\frac{K}{2}\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{r}\right)\right]^2$$

$$= \frac{K(r-\varepsilon q\alpha)^2}{2r(1-\varepsilon q\beta)} - \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}\left[\frac{K^2(r-\varepsilon q\alpha)^2}{4r^2}\right]$$

$$= \frac{K(r-\varepsilon q\alpha)^2}{2r(1-\varepsilon q\beta)} - \frac{K(r-\varepsilon q\alpha)^2}{4r(1-\varepsilon q\beta)}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{K(r-\varepsilon q\alpha)^2}{4r(1-\varepsilon q\beta)} \tag{3.9}$$

Jadi titik baliknya berada pada titik $\left[\frac{K\,(r-\varepsilon q\alpha)}{2r}, \frac{K(r-\varepsilon q\alpha)^2}{4r(1-\varepsilon q\beta)}\right]$.

Pada persamaan (3.1) konstanta dari pangkat tertinggi bernilai negatif, maka kurva yang dihasilkan akan cekung ke bawah. Akibatnya titik balik kurva pada grafik laju pertumbuhan populasi logistik dengan faktor pemanenan merupakan titik balik maksimum.

Langkah 5 : Menentukan Sumbu Simetri

Untuk menentukan sumbu simetri pada grafik dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :

Berdasarkan persamaan (3.1) diketahui bahwa :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}N - \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}N^2$$

Maka diperoleh garis sumbu simetri sebagai berikut :

$$\frac{d\left[\frac{dN}{dt}\right]}{dN} = \frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta} - \frac{2r}{K(1-\varepsilon q\beta)}N = 0$$

$$\frac{2r}{K(1-\varepsilon q\beta)}N = \frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}$$

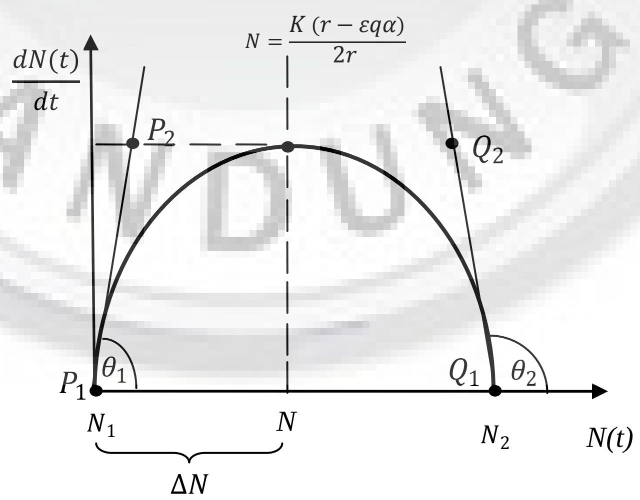
$$N = \frac{\left[\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right]}{2\left[\frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}\right]}$$

$$N = \frac{(r-\varepsilon q\alpha)\,K(1-\varepsilon q\beta)}{2r\,(1-\varepsilon q\beta)}$$

$$N = \frac{K\,(r-\varepsilon q\alpha)}{2r} \tag{3.10}$$

Jadi sumbu simetrinya berada pada titik $\frac{K\,(r-\varepsilon q\alpha)}{2r}$.

Setelah melakukan kelima langkah di atas, maka grafik laju pertumbuhan populasi dengan faktor pemanenan adalah sebagai berikut :



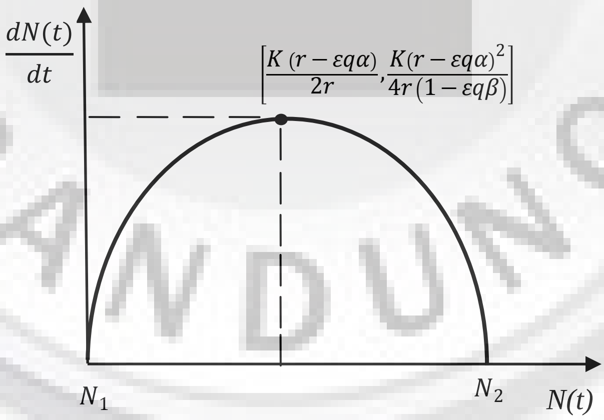
Gambar 3.1 Grafik Laju Pertumbuhan Populasi Logistik dengan Faktor Pemanenan

Pada gambar 3.1 di atas, grafik yang ditunjukkan berbentuk parabola dengan titik potong terhadap sumbu $N_1 = 0$ dan $N_2 = \left(1 - \frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)K$ serta sumbu simetri pada $N(t) = \frac{K\,(r - \varepsilon q\alpha)}{2r}$. Kondisi populasi pada saat N_1 dan N_2 menunjukkan bahwa laju pertumbuhan populasi kembali pada kondisi awal yaitu nol. Pada saat N_1 dan N_2 merupakan kondisi setimbang dari pertumbuhan populasi logistik dengan faktor pemanenan.

Pada interval $[N_1\,, N]$ grafik fungsi merupakan fungsi naik. Hal itu dapat ditandai dengan kondisi jika N bertambah atau semakin ke kanan maka $\frac{dN}{dt}$ naik, akibatnya gradien fungsi $\frac{d\left[\frac{dN}{dt}\right]}{dN} = m > 0$. Pada garis singgung yang pertama misalkan terdapat titik $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ untuk menghitung gradien adalah $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{+}{+}$ sehingga $m > 0$. Selain itu berdasarkan grafik dapat dilihat bahwa sudut yang dimiliki oleh θ_1 merupakan sudut lancip $(0° < \theta < 90°)$. Fungsi naik akan mengakibatkan nilai $\tan\theta_1 > 0$. Jadi terbukti pada interval $[N_1\,, N]$ grafik fungsi merupakan fungsi naik. Pada kondisi ini populasi mengalami pertumbuhan yang cepat, hal itu dapat dilihat dari nilai $\frac{dN}{dt}$ yang semakin besar akibatnya populasi akan mencapai kondisi maksimum.

Pada interval $[N, N_2]$ grafik fungsi merupakan fungsi turun. Hal itu dapat ditandai dengan kondisi jika N bertambah atau semakin ke kanan maka $\frac{dN}{dt}$ turun, akibatnya gradien fungsi $\frac{d\left[\frac{dN}{dt}\right]}{dN} = m < 0$. Pada garis singgung yang kedua misalkan terdapat titik $Q_1(x_1, y_1)$ dan $Q_2(x_2, y_2)$ untuk menghitung gradien adalah $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{+}{-}$ sehingga $m < 0$. Selain itu berdasarkan grafik dapat dilihat bahwa sudut yang dimiliki oleh θ_2 merupakan sudut tumpul $(90° < \theta < 180°)$. Fungsi turun akan mengakibatkan nilai $\tan \theta_2 < 0$. Jadi terbukti pada interval $[N, N_2]$ grafik fungsi merupakan fungsi turun. Pada kondisi ini populasi mengalami pertumbuhan yang lambat, hal itu dapat dilihat dari nilai $\frac{dN}{dt}$ yang semakin kecil akibatnya laju pertumbuhan populasi akan menuju nol.

Berdasarkan langkah 3 diketahui titik balik dari grafik berada pada titik $\left[\frac{K\,(r-\varepsilon q\alpha)}{2r}, \frac{K(r-\varepsilon q\alpha)^2}{4r(1-\varepsilon q\beta)}\right]$. Grafik yang dihasilkan dari laju pertumbuhan populasi logistik dengan faktor pemanenan berbentuk parabola yang cekung ke bawah sehingga dapat dipastikan bahwa titik balik tersebut merupakan titik balik maksimum, secara grafik ditunjukkan pada gambar dibawah ini :



Gambar 3.2 Grafik Nilai Maksimum Laju Pertumbuhan Populasi Logistik dengan Faktor Pemanenan

Untuk membuktikan bahwa titik $\left[\frac{K\,(r-\varepsilon q\alpha)}{2r}, \frac{K(r-\varepsilon q\alpha)^2}{4r(1-\varepsilon q\beta)}\right]$ merupakan titik maksimum dari grafik maka harus dilakukan uji titik maksimum dengan syarat $\frac{d^2\left[\frac{dN}{dt}\right]}{d^2N} < 0$ sebagai berikut :

$$\frac{d\left[\frac{dN}{dt}\right]}{dN} = \frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta} - \frac{2r}{K(1-\varepsilon q\beta)}N$$

$$\frac{d^2\left[\frac{dN}{dt}\right]}{d^2N} = -\frac{2r}{K(1-\varepsilon q\beta)} < 0$$

$$-2r < K(1-\varepsilon q\beta)$$

$$r > \frac{K(1-\varepsilon q\beta)}{2}$$

Syarat $\frac{d^2\left[\frac{dN}{dt}\right]}{d^2N} < 0$ dipenuhi maka terbukti bahwa $\left[\frac{K\,(r-\varepsilon q\alpha)}{2r}, \frac{K(r-\varepsilon q\alpha)^2}{4r(1-\varepsilon q\beta)}\right]$ merupakan titik maksimum dari grafik. Jadi jumlah populasi dengan faktor pemanenan akan mencapai maksimum pada saat $N = \frac{K\,(r-\varepsilon q\alpha)}{2r}$ dengan laju pertumbuhan maksimum $\frac{dN}{dt} = \frac{K(r-\varepsilon q\alpha)^2}{4r(1-\varepsilon q\beta)}$.

3.2 Solusi Model Pertumbuhan Populasi Logistik dengan Faktor Pemanenan

Berdasarkan persamaan (3.1) laju pertumbuhan populasi dengan faktor pemanenan ini dapat dimodelkan ke dalam bentuk persamaan diferensial Bernoulli dengan bentuk umum $\frac{dN}{dt} + NA(t) = N^nB(t)$, maka persamaan (3.1) dapat direduksi menjadi persamaan diferensial Bernoulli sebagai berikut :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta} N - \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)} N^2$$

$$\frac{dN}{dt} - \frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta} N = -\frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)} N^2$$

$$\frac{dN}{dt} + N\left(\frac{\varepsilon q\alpha - r}{1-\varepsilon q\beta}\right) = N^2\left(-\frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}\right) \qquad (3.11)$$

dengan *A(t)* $=\left(\frac{\varepsilon q\alpha - r}{1-\varepsilon q\beta}\right)$ dan *B(t)* $=\left(-\frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}\right)$

Untuk menentukan solusi umumnya, persamaan (3.11) akan direduksi ke bentuk persamaan diferensial linear dengan melakukan transformasi sebagai berikut :

$$Z = \frac{1}{N^{n-1}} = \frac{1}{N^{2-1}} = \frac{1}{N} = N^{-1}$$

$$\frac{dZ}{dN} = -N^{-2} = -\frac{1}{N^2}$$

Dengan menggunakan dalil rantai, substitusikan $\frac{dZ}{dN} = -N^{-2}$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{dN} \times \frac{dN}{dt}$$

$$\frac{dZ}{dt} = -N^{-2}\frac{dN}{dt}$$

$$\frac{dN}{dt} = -N^2\frac{dZ}{dt} \qquad (3.12)$$

Substitusi (3.12) ke persamaan (3.11) diperoleh :

$$-N^2\frac{dZ}{dt} + N\left(\frac{\varepsilon q\alpha - r}{1-\varepsilon q\beta}\right) = N^2\left(-\frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}\right)$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan $-\frac{1}{N^2}$ maka diperoleh :

$$\frac{dZ}{dt} - \frac{1}{N}\left(\frac{\varepsilon q\alpha - r}{1-\varepsilon q\beta}\right) = \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}$$

Substitusikan $Z = \frac{1}{N}$ diperoleh :

$$\frac{dZ}{dt} - Z\left(\frac{\varepsilon q\alpha - r}{1-\varepsilon q\beta}\right) = \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)} \qquad (3.13)$$

Berdasarkan bentuk persamaan diferensial linear $\frac{dZ}{dt} - Z\left(\frac{\varepsilon q\alpha - r}{1-\varepsilon q\beta}\right) = \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}$ maka dapat diperoleh solusi umum sebagai berikut :

$$Ze^{\int A(t)dt} = \int B(t)e^{\int A(t)dt}dt + C$$

$$Ze^{-\int\left(\frac{\varepsilon q\alpha - r}{1-\varepsilon q\beta}\right)dt} = \int \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)} e^{-\int\left(\frac{\varepsilon q\alpha - r}{1-\varepsilon q\beta}\right)dt} dt + C$$

$$Ze^{\int\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)dt} = \int \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)} e^{\int\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)dt} dt + C$$

$$Ze^{\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} = \int \frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)} e^{\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} dt + C$$

$$Ze^{\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} = \frac{\frac{r}{K(1-\varepsilon q\beta)}}{\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}} e^{\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} + C$$

$$Ze^{\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} = \frac{r(1-\varepsilon q\beta)}{K(1-\varepsilon q\beta)(r-\varepsilon q\alpha)} e^{\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} + C$$

$$Ze^{\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} = \frac{r}{K(r-\varepsilon q\alpha)} e^{\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} + C$$

Substistusi $Z = \frac{1}{N}$ sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{N} e^{\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} = \frac{r}{K(r-\varepsilon q\alpha)} e^{\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} + C$$

$$N = \frac{e^{\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t}}{\frac{r}{K(r-\varepsilon q\alpha)} e^{\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} + C}$$

Jika ruas kanan dikalikan dengan $\frac{e^{-\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t}}{e^{-\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t}}$ maka :

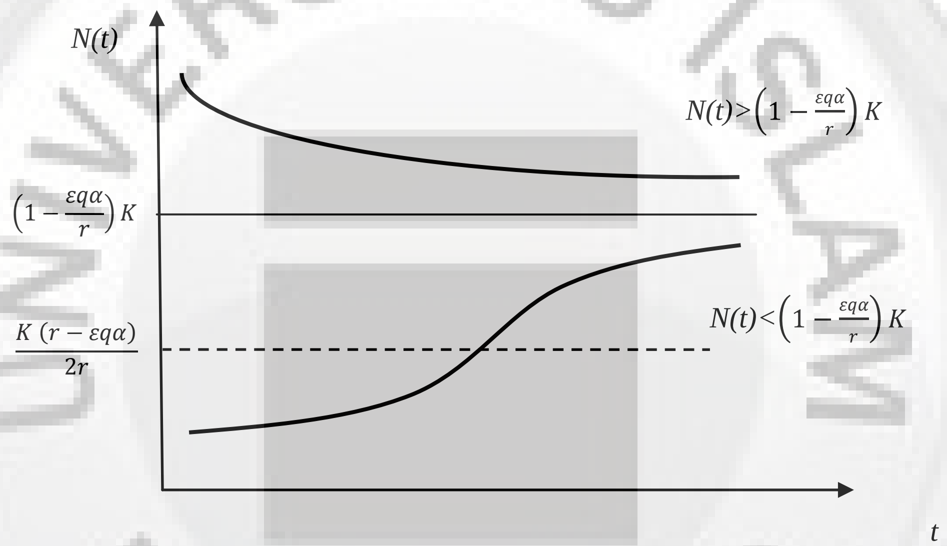
$$N = \frac{1}{\frac{r}{K(r-\varepsilon q\alpha)} + Ce^{-\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t}}$$

$$N = \frac{K(r-\varepsilon q\alpha)}{r + Ce^{-\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} K(r-\varepsilon q\alpha)}$$

Jadi solusi dari model pertumbuhan populasi logistik dengan faktor pemanenan adalah

$$N(t) = \frac{K(r-\varepsilon q\alpha)}{r + Ce^{-\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t}K(r-\varepsilon q\alpha)} \tag{3.14}$$

Jika persamaan (3.14) diformulasikan ke dalam sketsa grafik *N(t)* terhadap *t*, maka akan membentuk grafik sebagai berikut :



Gambar 3.3 Sketsa Grafik Solusi Model Pertumbuhan Populasi Logistik dengan Faktor Pemanenan

Berdasarkan gambar 3.3 akan diperoleh tiga kondisi pada pertumbuhan populasi yang dipengaruhi pemanenan, yaitu :

1. Pada saat $0 < N < \left(1 - \frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)K$ nilai $\frac{dN}{dt}$ selalu positif atau $\frac{dN}{dt} > 0$, akibatnya *N* merupakan fungsi naik pada suatu interval *t*. Pada kondisi ini menyebabkan grafik fungsi *N* terhadap *t* memiliki bentuk "S" atau sigmoid karena pada saat $N < \frac{K\,(r-\varepsilon q\alpha)}{2r}$ grafik naik dan cekung ke atas karena nilai

$\frac{dN}{dt}$ nya positif dan naik sedangkan pada saat $N > \frac{K\,(r-\varepsilon q\alpha)}{2r}$ grafik naik dan cekung ke bawah karena nilai $\frac{dN}{dt}$nya positif dan turun. Kondisi ini menunjukan bahwa laju pertumbuhan populasi dengan faktor pemanenan akan terus bertambah selama jumlah populasinya lebih kecil dari$\left(1-\frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)$K dan jumlah populasinya akan mendekati $\left(1-\frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)K$.

2. Pada saat $N > \left(1-\frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)K$, maka $\frac{dN}{dt} < 0$, akibatnya N merupakan fungsi turun pada interval *t*. Pada kondisi ini grafik fungsi *N* terhadap *t* akan turun dan cekung ke atas karena nilai $\frac{dN}{dt}$nya negatif dan turun. Kondisi ini menunjukkan bahwa laju pertumbuhan populasi dengan faktor pemanenan akan menurun pada saat jumlah populasinya lebih besar dari$\left(1-\frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)K$ dan jumlah populasinya akan mendekati $\left(1-\frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)K$.
3. Pada saat $N = 0$ dan $N = \left(1-\frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)K$, maka $\frac{dN}{dt} = 0$ dan *N(t)* tidak berubah atau konstan, kondisi ini menunjukkan bahwa laju pertumbuhan populasi dengan faktor pemanenan tidak akan bertambah maupun berkurang pada saat jumlah populasi nya 0 atau $\left(1-\frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)K$. Akibatnya pada saat jumlah populasi 0 atau $\left(1-\frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right)K$ merupakan kondisi setimbang dari pertumbuhan populasi logistik dengan faktor pemanenan.

3.3 Pemanenan Maksimum dan Kondisi yang Tepat untuk Melakukan Panen

Berdasarkan persamaan (2.21) diketahui bahwa fungsi pemanenan adalah $Y = \varepsilon q N(t)\left(\alpha - \beta \frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt}\right)$

Pemanenan di titik N_1 dan N_2 berarti nilai $\frac{dN}{dt} = 0$.

Substitusikan nilai $\frac{dN}{dt} = 0$ ke persamaan (2.21)

$$Y = \varepsilon q N\left(\alpha - \beta \frac{1}{N(t)} 0\right)$$

Diperoleh $Y = \varepsilon q N \alpha$

Jelas karena $N_1 = 0$ substitusi $N = N_1$ akan menyebabkan $Y = 0$ sehingga untuk menghindari nilai $Y = 0$ substitusikan nilai $N = N_2$ sehingga diperoleh:

$$Y = \varepsilon q \alpha N_2 \tag{3.15}$$

Berdasarkan persamaan (3.6) diketahui nilai $N_2 = \left(1 - \frac{\varepsilon q \alpha}{r}\right)K$ sehingga diperoleh:

$$Y = \varepsilon q \alpha \left(1 - \frac{\varepsilon q \alpha}{r}\right)K$$

$$= K\,(\varepsilon q \alpha) - \frac{K}{r}(\varepsilon q \alpha)^2 \tag{3.16}$$

Untuk memudahkan penentuan nilai pemanenan maksimum maka persamaan (3.16) dapat diformulasikan ke dalam sketsa grafik Y terhadap $\varepsilon q \alpha$ dengan melakukan langkah sebagai berikut :

1. Menentukan Diskriminan

Nilai diskriminan dapat diperoleh dengan menghitung $D = b^2 - 4ac$. Bentuk umum dari persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c$ sehingga berdasarkan persamaan (3.16) dapat diketahui nilai a, b dan c.

Jadi $D = (K)^2 - 4\left(-\frac{K}{r}\right)(0)$

$= (K)^2 > 0$

Karena nilai diskriminannya adalah positif maka persamaan (3.16) akan memiliki akar-akar yang berlainan akibatnya grafik fungsi akan memotong sumbu $\varepsilon q\alpha$.

2. Menentukan perpotongan dengan sumbu Y, maka nilai $\varepsilon q\alpha = 0$ sehingga :

$$Y = K\,(0) - \frac{K(0)^2}{r}$$

$$Y = 0$$

Jadi titik potongnya adalah (0,0)

3. Menentukan perpotongan dengan sumbu $\varepsilon q\alpha$, maka nilai $Y = 0$ sehingga :

$$K\,(\varepsilon q\alpha) - \frac{K(\varepsilon q\alpha)^2}{r} = 0$$

$$K\,(\varepsilon q\alpha)\left[1 - \frac{\varepsilon q\alpha}{r}\right] = 0 \qquad (3.17)$$

Berdasarkan persamaan (3.17) nilai $\varepsilon q\alpha$ yang memenuhi ada dua kemungkinan, yaitu :

$\varepsilon q\alpha = 0$ atau $1 - \frac{\varepsilon q\alpha}{r} = 0$

Kita sebut $(\varepsilon q\alpha)_1 = \varepsilon q\alpha = 0$ (3.18)

Jika $1 - \frac{\varepsilon q\alpha}{r} = 0$ maka :

$$r - \varepsilon q\alpha = 0$$

$$\varepsilon q\alpha = r$$

Kita sebut $(\varepsilon q\alpha)_2 = \varepsilon q\alpha = r$ (3.19)

Jadi titik potongnya adalah (0,0) dan $(r, 0)$

4. **Menentukan titik balik, maka nilai $\frac{d[Y]}{\varepsilon q\alpha} = 0$ sehingga :**

$$Y = K\,(\varepsilon q\alpha) - \frac{K(\varepsilon q\alpha)^2}{r}$$

$$\frac{d[Y]}{\varepsilon q\alpha} = K - \frac{2K(\varepsilon q\alpha)}{r} = 0$$

$$K = \frac{2K(\varepsilon q\alpha)}{r}$$

$$\varepsilon q\alpha = \frac{r}{2} \tag{3.20}$$

Substistusi persamaan (3.20) ke (3.16)

$$Y = K\left(\frac{r}{2}\right) - \frac{K(\frac{r}{2})^2}{r}$$

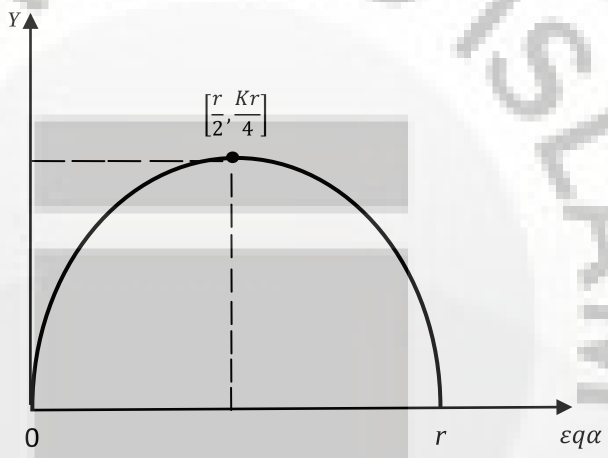
$$= \frac{Kr}{2} - \frac{Kr^2}{4r}$$

$$Y = \frac{Kr}{4} \tag{3.21}$$

Jadi titik baliknya berada pada titik $\left[\frac{r}{2}, \frac{Kr}{4}\right]$.

Persamaan (3.16) memiliki bentuk persamaan kuadrat yang koefisien pangkat tertingginya bernilai negatif sehingga akan menghasilkan kurva yang cekung ke bawah. Akibatnya titik $\left[\frac{r}{2}, \frac{Kr}{4}\right]$ merupakan titik balik maksimum.

Berdasarkan keempat langkah di atas maka dapat diperoleh grafik fungsi pemanenan sebagai berikut :



Gambar 3.4 Grafik Fungsi Pemanenan

Grafik fungsi yang ditunjukkan pada gambar 3.4 berbentuk parabola yang cekung ke bawah dengan titik potong terhadap sumbu $(\varepsilon q\alpha)_1 = 0$ dan $(\varepsilon q\alpha)_2 = r$ serta titik balik maksimum pada titik $\left[\frac{r}{2}, \frac{Kr}{4}\right]$. Untuk memastikan bahwa titik tersebut merupakan titik maksimum akan dilakukan uji titik maksimum dengan syarat $\frac{d^2[Y]}{d^2(\varepsilon q\alpha)} < 0$ sebagai berikut :

$$\frac{d[Y]}{\varepsilon q\alpha} = K - \frac{2K(\varepsilon q\alpha)}{r}$$

$$\frac{d^2[Y]}{d^2(\varepsilon q\alpha)} = -\frac{2K}{r} < 0$$

$$-2K < r$$

$$2K > r$$

Syarat $\frac{d^2[Y]}{d^2(\varepsilon q\alpha)} < 0$ dipenuhi maka terbukti bahwa $\left[\frac{r}{2}, \frac{Kr}{4}\right]$ merupakan titik maksimum dari grafik. Jadi fungsi pemanenan akan mencapai maksimum pada saat $\varepsilon q\alpha = \frac{r}{2}$ dengan hasil panen maksimum sebesar $Y = \frac{Kr}{4}$.

Selanjutnya akan dilakukan simulasi dari solusi model pertumbuhan populasi logistik dengan faktor pemanenan. Simulasi ini dilakukan untuk mengetahui pengaruh pemanenan terhadap jumlah populasi dengan cara mensubstitusi nilai konstanta laju pertumbuhan populasi dan pemanenan dengan rentang nilai r, K, $\varepsilon, q, \alpha, \beta$ antara 0 dan 1.

Diketahui $N(t) = \frac{K(r-\varepsilon q\alpha)}{r + Ce^{-\left(\frac{r-\varepsilon q\alpha}{1-\varepsilon q\beta}\right)t} K(r-\varepsilon q\alpha)}$

Kondisi 1 : Konstanta laju pertumbuhan populasi sama dengan pemanenan. Misalkan $r = 1, K = 1, \varepsilon = 1, q = 1, \alpha = 1, \beta = 0{,}3$, maka $\varepsilon q\alpha = 1$ sehingga diperoleh :

$$N(t) = \frac{1(1-1)}{1 + Ce^{-\left(\frac{1-1}{1-0{,}3}\right)t}\, 1(1-1)} = \frac{0}{1 + Ce^{-(0)t}\, 1(0)} = 0$$

Kondisi ini menunjukkan jika konstanta laju pertumbuhan populasi (r) sama dengan pemanenan ($\varepsilon q\alpha$) maka populasi akan punah, karena pertumbuhan populasi sama dengan kebutuhan panen akibatnya populasi akan habis. Jadi jika dilakukan panen pada kondisi ini populasi akan mengalami kepunahan.

Kondisi 2 : Konstanta laju pertumbuhan populasi lebih kecil dari pemanenan. Misalkan $r = 0{,}5\,, K = 1, \varepsilon = 1, q = 1, \alpha = 1, \beta = 0{,}3,$ maka $\varepsilon q\alpha = 1$ sehingga diperoleh :

$$N(t) = \frac{1(0{,}5-1)}{0{,}5 + Ce^{-\left(\frac{0{,}5-1}{1-0{,}3}\right)t}\ 1(0{,}5-1)} = \frac{-0{,}5}{0{,}5 + Ce^{\left(\frac{0{,}5}{0{,}7}\right)t}\ (-0{,}5)} < 0$$

Kondisi ini menunjukkan jika konstanta laju pertumbuhan populasi (r) lebih kecil dari pemanenan $(\varepsilon q\alpha)$ maka pertumbuhan populasi tidak mampu memenuhi kebutuhan panen. Akibatnya panen hanya dapat dilakukan pada saat laju pertumbuhan populasi lebih besar atau sama dengan pemanenan $(r \geq \varepsilon q\alpha)$.

Kondisi 3 : Konstanta laju pertumbuhan populasi lebih besar dari pemanenan. Misalkan $r = 1, K = 1, \varepsilon = 1, q = 0{,}8\,, \alpha = 1, \beta = 0{,}3,$ maka $\varepsilon q\alpha = 0{,}8$ sehingga diperoleh :

$$N(t) = \frac{1(1-0{,}8)}{1 + Ce^{-\left(\frac{1-0{,}8}{1-0{,}24}\right)t}\ 1(1-0{,}8)} = \frac{0{,}2}{1 + Ce^{-0{,}26t}(0{,}2)} > 0$$

Kondisi ini menunjukkan jika konstanta laju pertumbuhan populasi (r) lebih besar dari pemanenan $(\varepsilon q\alpha)$ maka populasi tidak akan punah, karena pertumbuhan populasi mampu memenuhi kebutuhan panen akibatnya populasi masih bisa tumbuh kembali. Jadi, jika dilakukan panen pada kondisi ini populasi akan tetap terjaga kelestariannya dan tidak akan mengalami kepunahan.

Berdasarkan ketiga kondisi di atas dapat disimpulkan bahwa kondisi yang tepat untuk melakukan panen adalah pada saat konstanta laju pertumbuhan populasi lebih besar dari pemanenan $(r > \varepsilon q\alpha)$.