BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Linear

Suatu himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linear dalam bentuk $x_1, x_2, \dots, x_n$ dinamakan sistem persamaan linear atau sistem linear. (Anton, 1987) Sebuah sistem sembarang yang terdiri dari m persamaan dengan n bilangan yang tidak diketahui dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Bila diberikan suatu SPL maka akan ada dua kemungkinan terhadap keberadaan solusinya, yaitu SPL tidak mempunyai solusi disebut SPL tidak konsisten dan SPL yang mempunyai solusi disebut SPL konsisten. Bila suatu SPL konsisten maka solusi dari SPL dibedakan menjadi dua yaitu satu solusi (Solusi Tunggal) dan ada banyak solusi yaitu (solusi tak hingga). Untuk melakukan solusi dari SPL dilakukan dengan cara membentuk matriks yang diperluas/diperbesar (*Augmanted Matrix)* dari SPL dan melakukan operasi baris elementer (OBE) pada matriks yang diperbesar tersebut.

Sebuah sistem persamaan-persamaan linear dikatakan homogen jika semua suku konstanta sama dengan nol yakni sitem tersebut mempunyai bentuk

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots + a_{mn}x_n = 0$$

Tiap-tiap SPL homogen adalah sistem yang konsisten, karena $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_3 = 0$ selalu merupakan pemecahan. Pemecahan tersebut dinamakan pemecahan trivial *(Trivial Solution)*. Jika ada pemecahan lain, maka pemecahan tersebut dinamakan pemecahan taktrivial *(Nontrivial Solution)*

Karena SPL homogen harus konsisten, maka terdapat satu pemecahan atau takhingga banyaknya pemecahan, karena salah satu di antara pemecahan ini adalah pemecahan trivial, maka dapat dibuat pernyataan berikut.

Untuk salah satu persamaan-persamaan linear homogen, maka persis salah satu di antara pernyataan berikut benar:

1. Sistem tersebut hanya mempunyai pemecahan trivial
2. Sistem tersebut mempunyai takhingga banyaknya permecahan taktribial sebagai tambahan terhadap pemecahan trivial tersebut

Teorema 2.1-1

Sistem Persamaan Linear homegen $m \times n$ memiliki penyelesaian tak trivial jika $n > m$.

2.2 Matriks

2.2.1 Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan elemen-elemen yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk persegi panjang dengan panjang dan lebar menunjukkan banyak baris dan banyak kolom. Matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut matriks berukuran $m \times n$. Matriks yang memiliki banyak baris dan banyak kolom sama disebut matriks persegi. Bentuk umum dari matriks adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elemen yang menempati baris ke-i dan kolom ke-j disebut entri (i, j) dan ditulis sebagai $A = [aij]$. Matriks yang terdiri dari 1 baris dan n kolom ditulis $1 \times n$ disebut dengan matriks baris atau vektor baris dan yang terdiri atas n baris dan 1 kolom disebut matriks kolom atau vektor kolom

Dari bentuk SPL dengan n peubah dan m persamaan dapat dituliskan dengan notasi matriks

$$Ax = B$$

bentuk matriks yang diperbesar dari SPL merupakan gabungan dari koefisien A dan matriks B yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

2.2.2 Macam-Macam Matriks

a. Matriks A dikatakan berukuran $m \times n$ (berdimensi $m \times n$)

b. Matriks A dengan dimensi $1 \times n$ disebut sebagai vektor baris, sedangkan yang berdimensi $m \times 1$ disebut vektor kolom Jika jumlah baris sama dengan jumlah kolom, yakni $m = n$. Maka matriks A dikatakan sebagai matriks bujursangkar dengan orde n.

c. Pada suatu matriks A jika $m = n$, maka elemen a_{ii} disebut sebagai elemen diagonal dari A, elemen-elemen lain merupakan elemen lain dari diagonal matriks A

d. Pada suatu matriks A dengan $m = n$, bila $a_{ii} \neq 0$ sedangkan elemen diluar diagonal A adalah nol, yaitu $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$, maka matriks A disebut matriks diagonal

e. Jika pada matriks diagonal di atas $a_{ii} = c$, untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$. Maka matriks tersebut dikatakan sebagai matriks skalar. Dengan kata lain matriks skalar adalah matriks diagonal dengan seluruh diagonalnya bernilai sama

f. Jika pada matriks diagonal di atas $a_{ii} = 1$, untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$. Maka matriks tersebut dikatakan sebagai matriks identitas (dinotasikan dengan I)

g. Jika pada matriks diagonal di atas $a_{ii} = 0$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$ maka matriks tersebut dikatakan sebagai matriks Null (dinotasikan dengan $O_{n \times n}$). Secara umum untuk sembarang matriks $A_{m \times n}$, bila seluruh elemennya bernilai nol maka matriks tersebut dinotasikan dengan $O_{m \times n}$

h. Matrik Segitiga Atas, yaitu matrik bujur sangkar yang semua entri di bawah diagonal utama bernilai nol

i. Matrik Segitiga Bawah, yaitu matrik bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utama bernilai nol.

j. Suatu Matriks A berorde $n \times n$ disebut simetris jika $A = A^t$

k. Matriks tridiagonal adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen-elemennya adalah nol, kecuali elemen-elemen pada diagonal utama serta samping kanan dan kirinya

l. Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

m. Matriks Definit Positif

Definisi 2.2-1

Matriks A disebut definit positif jika matriks tersebut simetris dan jika $x^t Ax > 0$ untuk setiap dimensi ke n vektor $x \neq 0$ dalam R^n

Teorema 2.2-1

Matriks Simetris A adalah definit positif jika dan hanya jika determinan setiap submatriks utama adalah positif

Contoh:

Misal diberikan matriks A yang simetris:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solusi:

$$\det A_1 = \det[2] = 2 > 0$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\det A_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 4 > 0$$

Semua determinan submatriksnya positif, sehingga dapat disimpulkan matriks A bersifat definit positif.

2.2.3 Invers Matriks

Definisi 2.2-2

Suatu matriks A berorde $n \times n$ dikatakan taksingular (*nonsingular*) atau dapat dibalik (*invertible*) jika terdapat matriks B sehingga $AB = BA = I$. Matriks B disebut sebagai invers perkalian dari A

Jika B dan C kedua-duanya adalah invers perkalian dari A, maka

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Jadi suatu matriks memiliki paling banyak satu invers perkalian. Invers perkalian dari suatu matriks taksingular A sebagai invers dari A ditulis A^{-1}

Definisi 2.2-3

Suatu matriks $n \times n$ dikatakan singular jika tidak memiliki invers perkalian

Teorema 2.2-2

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik atau yang mempunyai invers dan yang ukurannya sama, maka:

(a) AB dapat dibalik

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Dari teorema 2.2-5 di atas dapat disimpulkan bahwa

(i) jika A dan B dapat dibalik, maka AB dapat dibalik.

(ii) Jika A dan B tidak dapat dibalik, maka AB tidak dapat dibalik

Jika AB dapat dibalik, maka ada dua kemungkinan. Yaitu, A dan B kedua-duanya dapat dibalik atau kemungkinan yang kedua adalah salah satu A dan B dapat dibalik.

2.2.4 Matriks-Matriks Elementer

Satu matriks yang diperoleh dari matriks satuan I dengan melakukan satu operasi baris elementer disebut matriks elementer. Terdapat tiga jenis matriks-matriks elementer yang berkorespondensi dengan ketiga jenis opersi baris elementer

1) Matriks elementer jenis pertama adalah matriks yang diperoleh dengan mempertukarkan dua baris dari I
2) Matriks elementer jenis kedua adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan satu baris dari I dengan konstatnta bukan nol
3) Matriks elementer jenis ketiga adalah matriks yang diperoleh dari I dengan menjumlahkan kelipatan dari suatu baris pada baris yang lain

Teorema 2.2-3

Jika E adalah matriks elementer, maka E taksingular dan E^{-1} adalah matriks elementer dengan jenis yang sama

Definisi 2.2-4

Matriks B dikatakan ekivalen baris (*row equivalent)* dengan A jika terdapat baris matriks-matriks elementer $E_1, E_2, \ldots, E_k$, sehingga:

$$B = E_k\, E_{k-1}\ \ldots\ E_1 A$$

Dengan perkalian lain, B ekivalen baris dengan A jika B dapat diperoleh dari A dengan operasi-operasi baris yang berhingga banyaknya. Khususnya, dua matriks yang diperbesar $(A|\boldsymbol{b})$ dan $(B|\boldsymbol{c})$ adalah ekivalen baris jika dan hanya jika $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dan $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ adalah sistem-sistem ekivalen.

Sifat-sifat berikut mengenai matriks-matriks yang ekivalen baris:

(i) Jika A ekivalen baris dengan B, maka B ekivalen baris dengan A

(ii) Jika A ekivalen baris dengan B, dan B ekivalen baris dengan C , maka A ekivalen baris dengan C.

Teorema 2.2-4

Misalkan A matriks $n \times n$. Hal-hal berikut adalah ekuivalen:

(a) A taksingular

(b) $A\boldsymbol{x} = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial 0

(c) A ekuivalen dengan I

Bukti:

Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa pernyatan (a) mengakibatkan pernyataan (b). Jika A taksingular dan $\hat{\boldsymbol{x}}$ penyelesaian dari $A\boldsymbol{x} = 0$ maka:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = I\hat{\boldsymbol{x}} = (A^{-1}A)\hat{\boldsymbol{x}} = A^{-1}(A\hat{\boldsymbol{x}}) = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Jadi $A\boldsymbol{x} = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial. Selanjutnya akan menunjukkan bahwa pernyataan (b) mengakibatkan pernyataan (c). Jika menggunakan operasi-operasi baris elementer, sistem tersebut akan ditransformasikan menjadi bentuk $U\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$ di mana U berbentuk eselon baris. Jika salah satu elemen diagonal dari U adalah nol, maka baris terakhir dari U

seluruhnya terdiri dari 0. Tetapi kemudian $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ akan ekuivalen dengan suatu sistem dengan sistem yang lebih banyak peubah daripada persamaan dan dengan demikian berdasarkan teorema 2.1-1 sistem $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ akan memiliki penyelesaian taktrivial. Jadi U haruslah merupakan matriks segitiga dengan elemen-elemen diagonal semuanya sama dengan 1. Sebagai akaibatnya maka U adalah bentuk eselon baris tereduksi dari A sehingga A ekuivalen baris dengan I .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa pernyataan (c) mengakibatkan pernyataan (a). Jika A ekuivalen baris dengan I, maka terdapat matriks-matriks elementer $E_1, E_2, \dots, E_k$ sehingga

$$A = E_k E_{k-1} \dots E_1 I = E_k E_{k-1} \dots E_1$$

Tetapi karena E_i dapat dibalik, $i = 1, \dots, k$ maka hasil kali $E_k E_{k-1} \dots E_1$ juga dapat dibalik. Jadi A taksingular

Teorema 2.2-5

Misalkan A dan B matriks $n \times n$ dan dan $C = AB$. Jika B singular maka C pasti singular

Bukti:

Diketahui B adalah singular maka $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, memiliki penyelesaian taktrivial yaitu $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Akan dibuktikan $AB = C$ juga singular, yaitu $(AB)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ memiliki penyelesaian tak trivial yaitu $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

Andaikan AB taksingular, maka $(AB)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ mempunyai solusi trivial $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Ini mengakibatkan AB ekivalen baris dengan I, maka terdapat matriks-matriks elementer $E_1, E_2, \dots, E_k$ sehingga:

$$AB = E_k\, E_{k-1} \dots E_1 I = E_k\, E_{k-1} \dots E_1$$

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}E_k\, E_{k-1}\, \dots\, E_1$$

karena E_i dapat dibalik, $i = 1, 2, \dots, k$ maka hasil kali $E_k\, E_{k-1}\, \dots\, E_1$ dapat dibalik, sedemikian sehingga:

$$B = A^{-1}\underbrace{E_k\, E_{k-1}\, \dots\, E_1}_{dapat\ dibalik}$$

karena A dapat dibalik dan $E_k\, E_{k-1}\, \dots\, E_1$ juga dapat dibalik, maka B haruslah dapat dibalik. Maka pengandaian di atas tidak seharusnya dilakukan karena kontradiksi dengan B yang diketahui singular atau tidak dapat dibalik. jadi terbukti jika B singular, maka $AB = C$ juga singular.

2.2.5 Transpose Matriks

Definisi 2.2-5

Transpos dari suatu matriks A berorde $m \times n$ adalah matriks B berode $n \times m$ yang didefinisikan oleh:

$$b_{ji} = a_{ij}$$

Untuk $j = 1,2, \dots, n$ dan $i = 1, 2, \dots, m$. Transpos dari A dinyatakan oleh A^t.

2.3 Sifat Perkalian Determinan

Teorema 2.3-1

Jika A dan B adalah matriks-matriks $n \times n$, maka

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Bukti:

Jika B singular, maka AB juga singular sehingga

$$\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$$

Jika B taksingular, maka B ekuivalen baris dengan I, sehingga terdapat matriks-matriks elementer $(E_1, .., E_k)$ sehingga:

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(AE_kE_{k-1} \ldots E_1) \\ &= \det(A)\det(E_k)det(E_{k-1}) \ldots \det(E_1) \\ &= \det(A)\det(E_kE_{k-1} \ldots E_1) \\ &= \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.4-1

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ di dalam $\mathcal{R}^n$ dinamakan ***vektor eigen (eigenvector)*** dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$, yakni;

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

Untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan ***nilai eigen (eigenvalue)*** dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$, maka $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ dituliskan kembali sebagai

$$A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x}$$

atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari persamaan ini jika dan hanya jika:

$$det(\lambda I - A) = 0$$

Ini dinamakan persamaan karakteristik A, skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A.

Contoh :

Misal terdapat matriks A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari A adalah:

$$p(A) = \det(\lambda I - A) = det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$$

Jadi, terdapat dua nilai eigen dari A yaitu: $\lambda_1 = 1 \; dan \; \lambda_2 = 5$

- Vektor eigen dengan menggunakan $\lambda_1 = 5$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$5x_3 = 0; x_3 = 0$

$2x_1 + 2x_2 = 0 \; ; x_1 = -x_2$

Dimisalkan $x_1 = t$ maka $x_2 = -t$, dengan t sebarang bilangan

$$x = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 5$

- Vektor eigen dengan menggunakan $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$-4x_3 = 0$; $x_3 = 0$

$-2x_1 + 2x_2 = 0$; $x_1 = x_2$

Dimisalkan $x_1 = t$ maka $x_2 = t$, dengan t sebarang bilangan

$$x = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

jadi $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektor-vektor eigen yang bersesuain dengan $\lambda_2 = 1$

2.5 Radius Spektral

Radius spektral $\rho\ (A)$ dari suatu matriks didefinisikan sebagai $\rho\ (A) = \max|\lambda|$, di mana λ adalah nilai eigen dari matriks A

Contoh :

Berdasarkan hasil dari Contoh di atas terdapat dua nilai eigen yaitu :

$$\lambda_1 = 1\ dan\ \lambda_2 = 5$$

Maka radius spektral dari A: $\rho\ (A) = \max|\lambda| = \max\{|1|, |5|\} = 5$